ОУ

11.02.14

Орлов Михаил Владимирович

1 Понтрягин Л.С. "Принцип max в ОУ"

2 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. "Мат. теория опт-х процессов", Наука, 1986

3. Болтянский В.Г. "Мат. методы ОУ", 1969

4. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. "ОУ"

для особо усердных

зачёт, 1 к/р в мае (на дом)

$\dot{x} = f(x,u)$ (ранее: $\dot{x} = Ax+u$)

$x(t_0) = x_0$

$x \in E^n, u \in E^m$ (ранее: $n=m$)

D_u – класс допуст. упр-ий:

1). $u(\cdot) \in D_u$, $t \in [t_0, t_1]$

$t_0 \le t' < t'' \le t_1$, $u \in U \in \Omega(E^n)$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t); & t \in [t_0, t'] \cup [t'', t_1] \\ v, & t \in [t', t''],\ v = const \end{cases}$$

$\Rightarrow \bar{u}(\cdot) \in D_u$ (можем разрывать упр-ие)

2). $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ $\quad t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$

$\in [t_1, t_2]$

$\vdots$

$[t_{k-1}, t_k]$

$u(t)$ – доп. упр-ие на $\forall [t_{i-1}, t_i] \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{u}(t) = u(t)$ $\forall t \in [t_0, t_k]$ – доп. упр-ие (возможна склейка)

3). $u(t), t \in [t_0, t_1]$, $u(\cdot) \in D_u \Rightarrow v(t) = u(t-\alpha) \in D_u$

$t \in [t_0+\alpha, t_1+\alpha]$

D_{max} – класс измеримых огранич. ф-ий. (удовл. 1). – 3).), самый широкий класс

D – кусочно-непрерыв. (разрывы 1го рода, на концах не рвется) слева

т.е. $\lim\limits_{t\to\tau-0} u(t)=u(\tau)$

D_{min} – кусочно-постоянные ф-ии.

Итак, выбрали упр-ие $u(\cdot)\in D_u$, подставим:

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,u(t)) \equiv F(x,t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$$ – зад. Коши, $\Downarrow$ решение(?)

$u(t)$ – м.б. ~~прер~~ разрывна!

Ранее: $x(t)=e^{(t-t_0)A}\left(x_0+\int_{t_0}^{t}e^{-(s-t_0)A}u(s)ds\right)$.

Для зад. Коши была теорема ∃ и !:

① $F(x,t)$ – непр. в $\Pi \doteq \begin{cases}|t-t_0|\le a\\ |x-x_0|\le b\end{cases}$ (по совокупности переменных)

② Усл-ие Липшица: $\forall (x_1,t),(x_2,t)\in\Pi \Rightarrow |F(x_1,t)-F(x_2,t)|\le L\cdot|x_1-x_2|$

$\Downarrow$

$\exists h$: $\exists!$ на (t_0-h,t_0+h).

① ⇒ ∃, ② ⇒ ! (на самом деле)

Что происходит у нас:

$$\begin{cases}\dot{x} = F(x,t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\qquad \Pi = \begin{cases}|t-t_0|<a\ (\le)\\ |x-x_0|<b\end{cases}$$

Т. ∃: ① $F(x,t)$ – непр. по x для почти всех $t\in[t_0-a,t_0+a]$

② $F(x,t)$ – измер. по t для $\forall x$ для $x\in\Pi$

$\Downarrow$ ③ $|F(x,t)|\le m(t)$, $m(t)$ – инт. по Лебегу на $|t-t_0|<a$ (суммируемая)

$\exists h$: (t_0-h,t_0+h) ∃ реш. в классе абс. непр. ф-ий

Т. Каратеодори

④ $|F(x_1,t) - F(x_2,t)| \le \ell(t)\,|x_1 - x_2|$ → любые в измерим. случае

$\ell(t)$ - суммируемая

①-④ => т.!

Для выполнения ①-④ достаточно:

$\exists\ f(x,u),\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ - непрерыв. по совокупности переменных на $E^n \times \mathcal{U}$

Теперь считаем, что эти условия выполнены

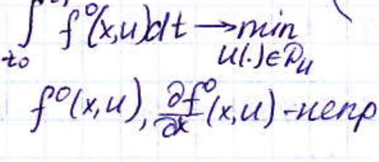
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

(Ранее: $Ax + u = \dot{x}$
$x(t_0) \in M_0$, t_0-фиксир
$x(t_1) \in M_1$
$t_1 - t_0 \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u}$)

⊕ $f^0(x,u), \frac{\partial f^0}{\partial x}(x,u)$-непр. по сов-ти на $E^n \times \overline{U}$

$X(t) = \{z \in E^n:\ \dot{x} = Ax + u,\ \overrightarrow{t_1 \le t \le \tau},\ x_0 \in M_0,\ u \in D_u\}$ - мн-во достижим.,

$X(t) = e^{(t_0 - t)A} M_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)} \mathcal{U}\, ds$ вып. компакт



$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\psi} = -A^*\psi \\ \psi(t_1) = \tilde{\psi} \end{cases}$$

2 ключ. условие:
① $X(t)$ - выпукло
② $x_{оптим.} \in \partial(X(t))$

Теперь: ① не всегда (практически никогда) верен
②-тоже не всегда верно!

Пример на ②:

$\dot{x}_1 = x_2 u - x_1 v$ $x_1(0) = 1$ $x_1(T) = -1$ $T \to \min$
$\dot{x}_2 = -x_1 u - x_2 v$ $x_2(0) = 0$ $x_2(T) = 0$ $|u| \le 1$
$|v| \le 1$

В полярн. коорд-ах: $\begin{cases} x_1 = r\cdot\cos\varphi \\ x_2 = r\cdot\sin\varphi \end{cases}$ $r^2 = x_1^2 + x_2^2$

$\left(\frac{d}{dt}\right)$: $\cancel{2}r\dot{r} = \cancel{2}x_1\dot{x}_1 + \cancel{2}x_2\dot{x}_2 = x_1x_2u - x_1^2v - x_2x_1u - x_2^2v = -r^2v \Rightarrow$
у-ие $\dot{r} = -r\,v$

③

$$\dot x_2 = \frac{d}{dt}(r\sin\varphi) = \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot\varphi = -x_1 u - x_2 v = -r\cos\varphi u - r\sin\varphi v$$

$$-rv\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot\varphi = -r\cos\varphi\cdot u - rv\sin\varphi$$

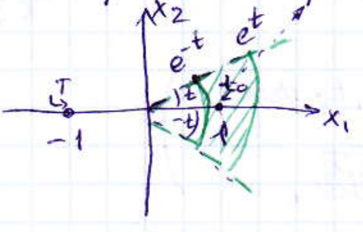
$$\Downarrow :r$$

$$\dot\varphi = -u$$

$$\Downarrow$$

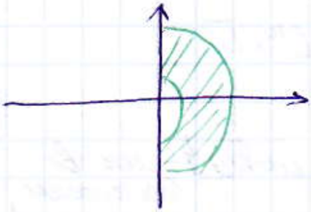
$$\begin{cases}\dot r = -rv & r(0)=1\\ \dot\varphi = -u & \varphi(0)=0\end{cases} \Longrightarrow \quad r(t) = \cancel{\int_0^t e^{-v(s)}ds}\; e^{-\int_0^t v(s)ds}$$

$$\varphi(t) = -\int_0^t u(s)ds$$



$\exists\ 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$$e^{-t} \le r(t) \le e^{t}$$
$$t \le \varphi(t) \le -t$$



$t=\frac{\pi}{2}$ и ползёт ~~круг~~ дальше, пока

$t=\pi$: $X(\pi) \ni \binom{-1}{0}$ - точка лежит сразу внутри, а не на границе!

Задача:

$$(1)\begin{cases}\dot x = f(x,u)\\ x(t_0)=x_0\\ x(t_1)=x_1\\ J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)du \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u}\end{cases} \xrightarrow[\text{к задаче}]{\text{перейдём}} \quad E^{n+1}: \begin{pmatrix}x^0\\ x^1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \tilde x, \quad \tilde x \in E^{n+1}$$

$$(*)\begin{cases}\dot x^0 = f^0(x,u)\\ \dot x = f(x,u)\end{cases}$$

$$\exists\ \tilde f(x,u) = \begin{pmatrix}f^0\\ f\end{pmatrix} \in E^{n+1}$$

$$\Downarrow$$

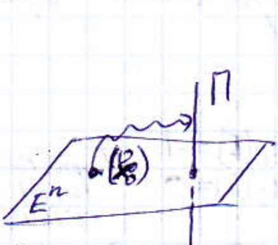
$$(*) \Leftrightarrow \quad \dot{\tilde x} = \tilde f(\tilde x, u) \equiv f(x,u)$$

$$\tilde x(t_0) = \begin{pmatrix}0\\ x_0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x(t_1) = x_1\\ x^0(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(s),u(s))ds = J\end{cases}$$

$$\tilde x(t_1) \in \Pi = \left\{\begin{pmatrix}\xi\\ x_1\end{pmatrix}, \xi\in E^1\right\}$$

$$x^0(t_1) \to \min_{u(\cdot)\in D_u}$$



Π - параллельна оси x^0 и проходит через т. $\binom{0}{x_1}$

$$(2)\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x},u) \equiv \tilde{f}(x,u) \\ \tilde{x}(t_0) = \binom{0}{x_0} \\ \tilde{x}(t_1) \in \Pi \\ x^0(t_1) \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$(1) \sim (2) \Rightarrow$ ~~в (2)~~: $x(t), u(t) \Leftrightarrow \tilde{x}(t), u(t)$

Утв. $\exists\, u_*(t), x_*(t)$ - оптим. процесс в зад. 1 $\Rightarrow$
$u_*(t), \tilde{x}_*(t)$ - оптим. процесс в зад. 2
и $\tilde{x}_*(t_1) \in \partial(\tilde{X}(t))$

$\Leftarrow$ $\exists\, \tilde{x}_*(t) \in \operatorname{int}(\tilde{X}(t))$

$\Downarrow$

$\exists\, \varepsilon > 0: \ S_\varepsilon(\tilde{x}_*(t)) \subset \tilde{X}(t_1)$

$\Downarrow$

$(x^0(t_1) - \varepsilon, x_1) \in \tilde{X}(t_1) \Rightarrow x^0$ - не min - против-ие $\Rightarrow$

$\boxed{18.02.14}$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)\,dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$u(t) \in U$, п.в. $t \in [t_0, t_1]$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Предполагается: $f(x,u), f^0(x,u), \frac{\partial f}{\partial x}(x,u), \frac{\partial f^0}{\partial x}(x,u)$ - непр. по совокупн. перем. $E^n \times U$

$$X(\tau) = \{\underset{z = x(\tau)}{z \in E^n}: \dot{x} = f(x,u(t)), x(t_0) = x_0, \overrightarrow{t_0 \le t \le \tau}, u(\cdot) \in D_u\}$$

Условие ограниченности

(α) $\|f(x,u)\| \le A\cdot\|x\| + B$, $A>0, B>0$, $\forall x,u$

(β) $(x, f(x,u)) \le A\cdot\|x\|^2 + B$, $A>0, B>0$, $\forall x,u$

β - шире α:

(α) ⇒ (β)

$$(x, f(x,u)) \underset{\text{нер-во Коши-Буняковского}}{\le} \|x\|\cdot\|f(x,u)\| \overset{(\alpha)}{\le} \|x\|(A\|x\|+B) =$$

$$= A\|x\|^2 + B\|x\| \le \left\{\underset{\forall x\in E^n}{\|x\|\le\|x\|^2+1}\right\} \le \underbrace{(A+B)\|x\|^2 + B}_{\text{усл-ие } \beta}$$

Лемма (Гронуолла-Беллмана)

$\exists x(t)$ - непр. на $[t_0,t_1]$ - ф-ия,

$\|x(t)\| \le P + Q\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|ds$, $P,Q\ge 0$, $\forall t\in[t_0,t_1]$

$$\Downarrow$$

$\|x(t)\| \le P\cdot e^{Q(t-t_0)}$, $\forall t\in[t_0,t_1]$

◁

$\exists M = \max\limits_{[t_0,t_1]}\|x(t)\|$.

1: $\|x(t)\| \le P + Q\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|ds \le P + Q\int_{t_0}^{t}M ds = P + QM(t-t_0)$

2: $\|x(t)\| \le P + Q\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|ds \le P + Q\int_{t_0}^{t}(P+QM(s-t_0))ds =$

$= P + QP(t-t_0) + Q^2(t-t_0)^2\frac{M}{2!}$

3: $\|x(t)\| \le P + Q\int_{t_0}^{t}(P+QP(s-t_0)+Q^2(s-t_0)^2\frac{M}{2!})ds =$

$= P + QP(t-t_0) + Q^2P\frac{(t-t_0)^2}{2!} + Q^3M\frac{(t-t_0)^3}{3!}$

N+1: $\|x(t)\| \le P + QP(t-t_0) + Q^2P\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + \frac{Q^NP(t-t_0)^N}{N!} + \underbrace{\frac{Q^{N+1}M(t-t_0)^{N+1}}{(N+1)!}}_{\to 0}$

$N\to+\infty$: $\|x(t)\| \le P(1 + Q(t-t_0) + \frac{Q^2(t-t_0)^2}{2!} + \dots$

$+ \frac{Q^N(t-t_0)^N}{N!} + \dots) = P\cdot e^{Q(t-t_0)}$

▷

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

$(\alpha)\ \|f(x,u)\| \le A\|x\| + B$

или $(\beta)\ (x, f(x,u)) \le A\|x\|^2 + B$

Траектории равномерн. ограничены:

$$1.\ x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), u(s))ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \le \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|f(x(s), u(s))\|ds \overset{(\alpha)}{\le}$$

$$\le \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} (A\|x(s)\| + B)ds \le$$

$$\le \underbrace{\|x(t_0)\| + B(t-t_0)}_{P} + \underset{Q}{A}\int_{t_0}^{t} \|x(s)\|ds \Rightarrow \{\text{лемма}\} \le$$

$$\Rightarrow \|x(t)\| \le (\|x(t_0)\| + B(t-t_0)) \cdot e^{A(t-t_0)}$$

(Всегда сидим в шаре.

$$2.\ \frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(x(t), x(t)) = 2(x, \dot{x}) =$$

$$= 2(x, f(x,u)) \overset{(\beta)}{\le} 2A\|x(t)\|^2 + 2B$$

$$\|x(t)\|^2 = \|x(t_0)\|^2 + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\|x(s)\|^2 ds \le$$

$$\le \|x(t_0)\|^2 + \int_{t_0}^{t} (2A\|x(s)\|^2 + 2B)ds \le$$

$$\le \underbrace{\|x(t_0)\|^2 + 2B(t-t_0)}_{P} + \underset{Q}{2A}\int_{t_0}^{t} \|x(s)\|^2 ds$$

$$\overset{\text{лемма}}{\Downarrow}$$

$$\|x(t)\|^2 \le (\|x(t_0)\|^2 + 2B(t-t_0))e^{2A(t-t_0)}$$

$\|x(t)\| \le C \Rightarrow f(x,u), \frac{\partial f}{\partial x}(x,u)$ – равном. огранич., если $\bar{u} \in$ ~~conv~~ $\Omega(E^n)$

Т.1 ① Условие ограниченности в форме α или β
② $\bar{u} \in \Omega(E^n)$
Тогда $\bar{x}(t) \in \Omega(E^n), \forall t \in [t_0, t_1]$ и м.о. $\bar{x}(t)$ – непрерыв. на $[t_0, t_1]$

1. ①,② $\Rightarrow$ $X(t)$-огранич. для $\forall t \in [t_0, t_1] \Rightarrow \overline{X}(t) \in \Omega(E^n)$

2. Берём $\forall t' \in [t_0, t_1]$, $\overline{X}(t') \ni p_1$, p_1 - произв. точка $\overline{X}(t')$

$\xRightarrow{\text{замык}} \forall \varepsilon > 0 : \ \exists x(\cdot) \ \|x(t') - p_1\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$$x(t) - x(t'), \quad \left. \begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(x(s), u(s))ds \\ x(t') &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t'} f(x(s), u(s))ds \end{aligned} \right| \Rightarrow$$

$$x(t) - x(t') = \int_{t}^{t'} f(x(s), u(s))ds$$

$$\|x(t) - x(t')\| \underset{\substack{\text{св-ва} \\ \text{инт-ла}}}{\leq} \left| \int_{t}^{t'} \|f(x(s), u(s))\| ds \right| \underset{\text{равн. огранич.}}{\leq} m|t - t'|$$

m - не зависит от x и t'

$$\exists |t - t'| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x(t')\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$|t - t'| < \delta$:

$$\|x(t) - p_1\| = \|x(t) - x(t') + x(t') - p_1\| \leq \|x(t) - x(t')\| + \|x(t') - p_1\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, $\forall p_1 \in \overline{X}(t')$, $\exists x(t) \in X(t) \subset \overline{X}(t)$,

$$|t - t'| < \delta \Rightarrow \|x(t) - p_1\| \leq \varepsilon$$

$\Downarrow$

а) $\forall$ т. $p_1 \in \overline{X}(t')$ $\exists p_2 \in \overline{X}(t)$: $|p_1 - p_2| \leq \varepsilon$ при $|t - t'| < \delta$

б) $\forall p_1 \in \overline{X}(t)$ $\exists p_2 \in \overline{X}(t')$:

$\Downarrow$

$$\left. \begin{aligned} \overline{X}(t) &\subset \overline{X}(t') + S_\varepsilon(0) \\ \overline{X}(t') &\subset \overline{X}(t) + S_\varepsilon(0) \end{aligned} \right. \quad |t - t'| < \delta$$

$\Downarrow$

непр-но многозн-ое отображение

(основная!)

I.2 ① Условие ограничен-ти в форме (α) или (β)

② $U \in \Omega(E^r)$

③ $F(x) \equiv f(x, U) = \{z \in E^n : z = f(x, u), u \in U\}$ - выпукло $\forall x$

$\Rightarrow \overline{X}(t) = X(t), \forall t \in [t_0, t_1]$.

$F(x)$ - вектор грамма скоростей.

Т.3 (т. ∃ в зад. быстродействие)

$\dot{x}=f(x,u),\ x(t_0)=x_0,\ X(t_1)=x_1,\ t_1-t_0\to\min\limits_{u(\cdot)\in D_u}$

① Условие огранич. в форме (α) или (β)
② $U\in\Omega(E^r)$
③ $F(x)$ - выпукл., $F(x)\in\operatorname{conv}\Omega(E^n)$
④ $\exists\tau>t_0$: на $[t_0,\tau]$ задача управления

$\Rightarrow$ ∃ оптим. реш. нелин. зад. быстродействие

$T.1, T.2 \Rightarrow X(t)\in\Omega(E^n)$, $X(t)$ - непр. по t.

$\exists\ \tau^*=\inf\{\tau>~~t~~_0 : [t_0,\tau]$ - задача управляема$\}\Rightarrow$

$\Rightarrow t_k\to\tau^*+0$, $[t_0,t_k]$ - зад. упр-а

$x_1\in X(t_k)\overset{\text{непр}}{\subset} X(\tau^*)+S_\varepsilon(0)\quad |t_k-\tau^*|<\delta$
$\forall\varepsilon>0$

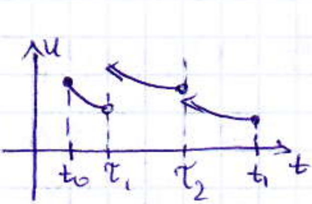
$\exists\ \varepsilon=\frac{1}{m},\ m=1,2,3,\ldots$

$$x_1=X(\tau^*)+S_{\frac{1}{m}}(0)\Rightarrow x_1=\underset{X(\tau^*)}{\underset{\cap}{\xi^m}}+\frac{1}{m}\underset{S_1(0)}{\underset{\cap}{\varphi^m}}$$

$$m\to\infty\quad x_1=\xi^m+\underbrace{\frac{1}{m}\varphi^m}_{\downarrow\ 0}\xrightarrow[\|\varphi^m\|\le1]{}\xi^*\in X(\tau^*)$$

D_u - кусочно-непр. ф-ция.

$u(t),\ t\in[t_0,t_1]$, непр. слева



$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u(t))\equiv\varphi(x,t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ - зад. Коши $\Rightarrow\exists$ решение $x(t)$ $t\in[t_0,t_1]$

Немного поменяем:

$\begin{cases}\dot{x}=\varphi(x,t)\\ x(t_0)=\xi\end{cases},\ \|\xi-x_0\|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ решение $x(t,\xi,t_0)$ на $t\in[t_0,t_1]$ и $x(t,\xi,t_0)$ - непрер. по совок. (t,ξ)

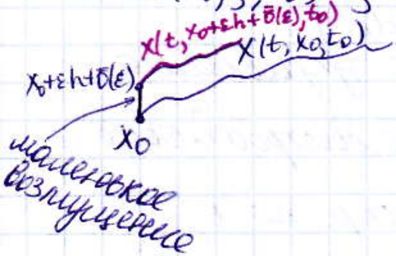
$\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,\xi,t_0)$ – абс непр. $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$

$x(t_0,\xi,t_0)=\xi.$

$\Downarrow$

изначальное решение $x(t) = x(t, x_0, t_0)$

$$x(t_0,\xi,t_0)=\xi = x_0+\varepsilon h+\bar{o}(\varepsilon)$$



$$x(t, x_0+\varepsilon h+\bar{\bar{o}}(\varepsilon), t_0) \overset{\text{Тейлор}}{=} x(t,x_0,t_0) + \underbrace{\varepsilon\cdot y(t)}_{\text{линейн. возмущение}} + \bar{o}(\varepsilon)$$

$\boxed{25.02.14}$

$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\quad\quad$ $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u(t)) = \varphi(x,t) \\ x(t_0) = x_0, \quad t\in[t_0,t_1] \end{cases}$

$u(t)\in D_u$

$t\in[t_0,t_1]$

(продолжение)

$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u(t)) = \varphi(x,t) \\ x(t_0) = t_0+\varepsilon h+\bar{o}(\varepsilon) \end{cases}$ $\quad\quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(x(t,x_0+\varepsilon h+\bar{\bar{o}}(\varepsilon),t_0) - x(t,x_0,t_0)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,x_0,t_0)\cdot \varepsilon h\right) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}x(t,x_0,t_0)\cdot h\right) + \bar{o}(\varepsilon) = \frac{\partial x}{\partial t}(t,x_0+\varepsilon h+\bar{o}(\varepsilon),t_0) -$$

$$-\frac{\partial x}{\partial t}(t,x_0,t_0) = \varphi(x(t,x_0+\varepsilon h+\bar{o}(\varepsilon),t_0),t) -$$

$$-\varphi(x(t,x_0,t_0),t) = \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x(t,x_0,t_0),t)\frac{\partial x}{\partial \xi}(t,x_0,t_0)h +$$

$+ \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

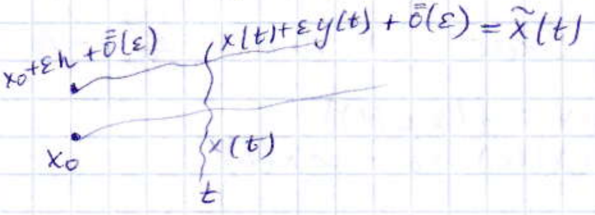
$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, x_0, t_0) = y(t)$$

$$\begin{cases} \dot y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(x(t, x_0, t_0), t\right) \cdot y \\ y(t_0) = \frac{\partial x}{\partial \xi}(t_0, x_0, t_0) h = h \end{cases}$$

$\begin{cases} \dot y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\left(x(t, x_0, t_0), t\right) y \\ y(t_0) = h \end{cases}$ – у-ние в вариациях

$$x(t, x_0 + \varepsilon h + \bar{\bar{o}}(\varepsilon), t_0) = x(t, x_0, t_0) + \varepsilon y(t) + \bar{o}(\varepsilon)$$

$\begin{cases} \dot y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$



$\exists\, t = \tau$

$$\tilde{x}(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

$y|_{t=\tau} = y(\tau)$, $\quad t = \tau \Rightarrow y(\tau) \in E^n$
$\quad t \geq \tau \Rightarrow y(t) \in E^n$

$\exists A_{t\tau} : E^n \to E^n$

A_{tt} – линейн. однородн. оператор
$A_{\tau\tau}$ – тождественный оператор, $A_{\tau\tau} h = h$

$\tau < s < T$

$$A_{Ts} A_{s\tau} h = A_{t\tau} h$$

$$\begin{cases} \dot y = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x(t), t)}_{A(t)} y \\ y|_{t=\tau} = h \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t \in [q, s] \\ y(s) = \tilde{h} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_*(t), t) \cdot y \\ y|_{t=s} = \tilde{h} \end{cases}$$

$t \in [S, T] \longrightarrow y(T) = \tilde{\tilde{h}}$

То же самое, что

$$\begin{cases} \dot y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} y \\ y|_{t=0} = h \end{cases}, \ t \in [\tau, T] \longrightarrow y(T)=$$

$$\begin{cases} \dot y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x(t, x_0, t_0), t) y \\ y(t_0) = h \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot y = \frac{\partial f}{\partial x} (x(t), u(t)) y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$u(t) \in D_u$

Было $\dot x = Ax + u$, $\frac{\partial f}{\partial x} = A$

$$\begin{cases} \dot x = f(x, u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \rightsquigarrow x(t) \end{cases}$$

Сопряжённая система:

$$\dot \psi = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} (x(t), u(t)) \right)^* \psi ,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x} = -A^*$$

$$f(x, u) = Ax + u$$

Лемма

Г $y(t)$ - произвольное решение у-ия в вариациях, $\psi(t)$ - произв. реш. сопряж. у-ия. Тогда $(y(t), \psi(t)) \equiv const$

$\triangleleft$

$$\frac{d}{dt}(y(t), \psi(t)) = (\dot y(t), \psi(t)) + (y(t), \dot\psi(t)) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} y, \psi(t) \right) + \left(y, -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^* \psi \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} y, \psi \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x} y, \psi \right) = 0$$

$\triangleright$

$u(t),\ \varepsilon>0$

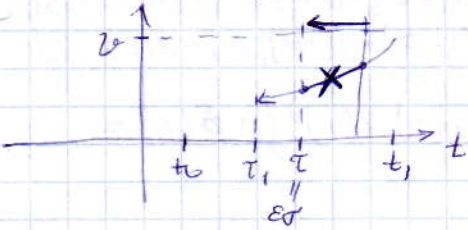
$\|u(t)-u^*(t)\|\leq\varepsilon$, где $u^*(t)$ - вариац. ф-ции $u(t)$

$U=\{-1,1\}$
U - открытое мн-во

Вариации Макшейна (игольчатые вариации)

$u(\cdot)\in D_u$, $u(t)$ - н/непр. слева $t\in[t_0,t_1]$
$\tau\in(t_0,t_1]$ - точка непрерыв. упр-ия $u(\cdot)$

$\varepsilon>0,\ \sigma\geq0,\ v\in U$



$\mathcal{I}=(\tau-\varepsilon\sigma,\tau]$

$$u^*(t)=\begin{cases}u(t), & t\in[t_0,t_1]\setminus\mathcal{I}\\ v, & t\in\mathcal{I}\end{cases}$$

$u^*(t)$ - одночленная вариация Макшейна.
$\parallel$
$\mathcal{M}(\tau,\sigma,v,\varepsilon)$

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u^*(t))\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\Longrightarrow x^*(t)\text{-решение}$$

$t\in[t_0,\tau-\varepsilon\sigma]$: $u^*(t)=u(t)\Rightarrow x^*(t)=x(t)$
$t\in(\tau-\varepsilon\sigma,t]$: $x^*(t)=x^*(\tau)+\int_{\tau}^{t}f(x^*(s),v)ds=$

$$=x^*(\tau)+\alpha(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0$$

$$x(\tau)=\underset{x^*(\tau-\varepsilon\sigma)}{\underline{x(\tau-\varepsilon\sigma)}}+\int_{\tau-\varepsilon\sigma}^{\tau}f(x(t),u(t))dt$$

$$x^*(\tau)-x(\tau)=\int_{\tau-\varepsilon\sigma}^{\tau}(f(x^*(t),\vartheta)-f(x(t),u(t)))dt \ominus$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x^*(t),\vartheta)=f(x^*(\tau),\vartheta)+\alpha(\varepsilon), \\ f(x(t),u(t))=f(x(\tau),u(\tau))+\alpha(\varepsilon) \end{array}\right\}$$

$$\ominus \int_{\tau-\varepsilon\sigma}^{\tau}[f(x^*(\tau),\vartheta)-f(x(\tau),u(\tau)+\alpha(\varepsilon)]dt=$$

$$=\varepsilon\sigma[f(x^*(\tau),\vartheta)-f(x(\tau),u(\tau)]+\varepsilon\sigma\alpha(\varepsilon)=$$

$$=\varepsilon\sigma[f(x^*(\tau,\vartheta)-f(x(\tau),u(\tau))]+\bar{o}(\varepsilon)\overset{?}{=}$$

$$=\varepsilon\tilde{\xi}+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)\ominus\left\{\begin{array}{l} x^*(\tau)=x(\tau)+\varepsilon\tilde{\xi}+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)=x(\tau)+\alpha(\varepsilon)=> \\ => f(x^*(\tau),\vartheta)=f(x(\tau),\vartheta)+\alpha(\varepsilon) \end{array}\right\}$$

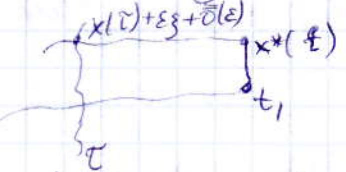
$$\ominus\varepsilon\sigma[f(x(\tau),\vartheta)-f(x(\tau),u(\tau))]+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)=$$

$$=\varepsilon\xi+\bar{o}(\varepsilon)$$

$$x^*(\tau)-x(\tau)=\varepsilon\xi+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

$$\xi=\sigma[f(x(\tau),\vartheta)-f(x(\tau),u(\tau))]$$

$$x^*(\tau)=x(\tau)+\varepsilon\xi+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$



$$x^*(t_1)-x(t_1)=\varepsilon A_{t_1\tau}\xi+\bar{o}(\varepsilon)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{y}=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),u(t))y \\ y|_{t=\tau}=\xi\ \sigma[f(x(\tau),\vartheta)-f(x(\tau),u(\tau))] \end{array}\right] \rightsquigarrow y(t_1)=A_{t_1\tau}\dot{\xi}$$

Усложненная одноточечная вариация Макшейна

$\mathcal{M}(\tau,\sigma,\vartheta,a)\longrightarrow\mathcal{M}(\tau,\sigma_1,..\sigma_k;\vartheta_1,...\vartheta_k;\varepsilon)$

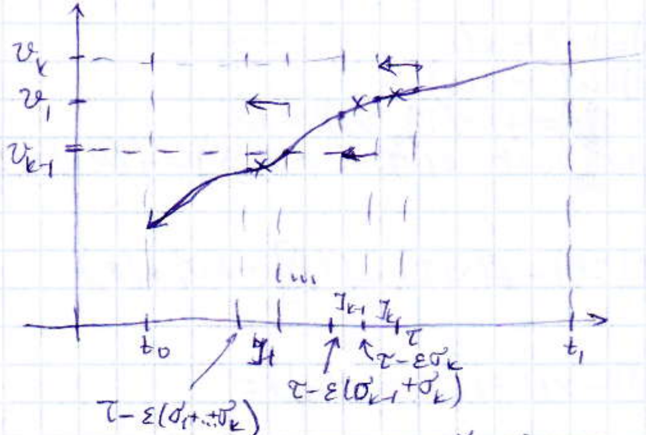
τ – т. непрер. упр-ие u

$\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_k \geq 0$

$v_1, v_2, \dots v_k, \quad v_i \in U, i=\overline{1,k}$

$\varepsilon > 0$

$J_1, J_2, \dots J_k, \quad |J_i| = \varepsilon \cdot \sigma_i$



$$J_1 = (\tau-\varepsilon(\sigma_1+\dots+\sigma_k), \tau-\varepsilon(\sigma_2+\dots+\sigma_k)]$$

$$u^*(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [t_0, t_1] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} J_i \\ v_i, & t \in J_i \end{cases}$$

$\|x^*(\tau) - x(\tau)\| - ?$

$\boxed{4.03.14.}$

Вариации $x(\cdot)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$u(t), x(t), t \in [t_0, t_1]$

$\tilde{x}_0 = x_0 + \varepsilon h + \bar{o}(\varepsilon)$

$\tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon y(t) + \bar{o}(\varepsilon)$

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{u=u(t)\\ x=x(t)}} y \\ y(t_0) = h \end{cases}$$

Вариации $u(\cdot)$:

$M(\tau, \sigma, v, \varepsilon)$

$u^*(t) = \begin{cases} v \in U, \; t \in (\tau-\varepsilon\sigma, \overset{\text{т. непр.}}{\tau}] \end{cases}$

$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon \cdot \xi + \bar{o}(\varepsilon), \quad \xi = \sigma[f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))]$

$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon \cdot A_{t_1\tau}\xi + \bar{o}(\varepsilon)$

Вернемся к условн. вариацион. упр-ию.

$(k \equiv s)$

1. $x^*(\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s))-x(\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s))=$
$= \varepsilon\cdot\sigma_1[f(x(\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s)),v_1)-f(x(\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s)),u(-\|-))$
$+\bar{\bar{o}}(\varepsilon) \ominus$

$$x(\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s))=x(\tau)+\alpha(\varepsilon), \quad \alpha(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$$

$$(*)\ \begin{aligned}&u(\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s))=u(\tau)+\alpha(\varepsilon)\\ &f(x(\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s)),v_1)=f(x(\tau),v_1)+\alpha(\varepsilon)\\ &f(x(\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s)),u(\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s)))=f(x(\tau),u(\tau))+\alpha(\varepsilon)\end{aligned}$$

$$\ominus\ \varepsilon\sigma_1[f(x(\tau),v_1)-f(x(\tau),u(\tau))]+\varepsilon\sigma_1\alpha(\varepsilon)$$

2. $x^*(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s))-x(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s))=$

$$= x^*(\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s))-x(\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s))+ + \int\limits_{\tau-\varepsilon(\sigma_2+\sigma_s)}^{\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)}[f(x^*(s),v_2)-f(x(s),u(s))ds=$$

$$=\overbrace{\varepsilon\sigma_1[f(x(\tau),v_1)-f(x(\tau),u(\tau))]}^{\xi_1}+$$
$$+\int\limits_{\tau-\varepsilon(\sigma_2+\ldots+\sigma_s)}^{\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)}[f(x^*(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)),v_2)-f(x(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)),u(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)))+\alpha(\varepsilon)]ds$$

$$=\varepsilon\xi_1+\varepsilon\sigma_2[f(x^*(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)),v_2)-$$
$$-f(x(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)),u(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)))]+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)=$$

$=$ {выражение, аналогичное $(*)$ – непрер} $=$

$$=\varepsilon\xi_1+\varepsilon\sigma_2[f(x^*(\tau),v_2)-f(x(\tau),u(\tau)]+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)\ominus$$

с этим переходом [illegible] позже!

$$\left\{\begin{aligned}&x^*(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s))=x(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s))+\alpha(\varepsilon)\\ &f(x^*(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)),v_2)\underset{\text{непр. по "x"}}{=}f(x(\tau-\varepsilon(\sigma_3+\ldots+\sigma_s)),v_2)+\alpha(\varepsilon\end{aligned}\right\}$$

$$= \varepsilon\xi_1 + \sigma_2[f(x(\tau-\varepsilon(\sigma_3+..+\sigma_s)), v_2) - f(x(\tau-\varepsilon(.)), u(\tau-\varepsilon(.)))]+$$

$$+\bar{\bar{o}}(\varepsilon) = \{(*)\text{-аналогично}\} =$$

$$= \varepsilon\xi_1 + \varepsilon\sigma_2[f(x(\tau), v_2) - f(x(\tau), u(\tau))] + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

3. ... (для всех σ_i)

$$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon\sum_{i=1}^{s}\xi_i + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) = \varepsilon\xi + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

$$\xi_i = \sigma_i[f(x(\tau), v_i) - f(x(\tau), u(\tau))]$$

$$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon A_{t_1\tau}\xi + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

Итак, мы рассмотрели:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{M}(\tau, \sigma, v, \varepsilon) \\ \mathcal{M}(\tau; \sigma_1, \dots \sigma_s; v_1, \dots v_s, \varepsilon)\end{array}\right\}\text{одночленное}$$

Многочленная вариация Макшейна

$\exists\ t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{r-1} < \tau_r < t_1$

τ_i - т. непрер. ~~[illegible]~~ упр-ия $u(t)$

$\mathcal{M}_1(\tau_1; \sigma_1^1, \dots \sigma_{s_1}^1; v_1^1, \dots v_{s_1}^1; \varepsilon)$ ⇝ применили 1-ую вар-ию

$\mathcal{M}_2(\tau_2; \sigma_1^2, \dots \sigma_{s_2}^2; v_1^2, \dots v_{s_2}^2; \varepsilon)$ ⇝ применили 2-ую вар-ию

. . . .

$\mathcal{M}_r(\underset{\tau}{\overset{\shortparallel}{\tau_r}}; \sigma_1^r, \dots \sigma_{s_r}^r; v_1^r, \dots v_{s_r}^r; \varepsilon)$

$\tau_1 < \tau_2$

$\mathcal{M}_1$: $x^*(\tau_1) - x(\tau_1) = \varepsilon\cdot\xi_1 + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

$\mathcal{M}_2$: $x^*(\tau_2) - x(\tau_2) = \varepsilon\cdot\xi_2 + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$, где

$$\xi_i (= \sum_{j=1}^{s_i}\sigma_s^i[f(x(\tau_i), v_j^i) - \underset{i=1,2}{f}(x(\tau_i), u(\tau_i))]$$

$\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$: $\tau_2 - \varepsilon(\sigma_1^2 + \dots + \sigma_{s_2}^2)$

$$x^*(\tau_2-\varepsilon(\sigma_1^2+\ldots+\sigma_{s_2}^2))-x(\tau_2-\varepsilon(\sigma_1^2+\ldots+\sigma_{s_2}^2))=\{\text{лин-ть опер.}\}$$

$$=\varepsilon A_{\tau_2-\varepsilon(\sigma_1^2+\ldots+\sigma_{s_2}^2)\tau_1}\xi_1+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)\ominus$$

$$\left\{A_{\tau_2-\varepsilon(\sigma_1^2+\ldots+\sigma_{s_2}^2)\tau_1}\xi_1\overset{\text{непр.}}{=}A_{\tau_2\tau_1}\xi_1+\alpha(\varepsilon)\right\}$$

$$\ominus\ \varepsilon A_{\tau_2\tau_1}\xi_1+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

$$x^*(\tau_2)-x(\tau_2)=x^*(\tau_2-\varepsilon(\sigma_1^2+\ldots+\sigma_{s_2}^2))-x(\tau_2+\varepsilon(\sigma_1^2+\ldots+\sigma_{s_2}^2))+$$
$$+\int_{\tau_2-\varepsilon(\sigma_1^2+\ldots+\sigma_{s_2}^2)}^{\tau_2}[f(x^*(s),u^*(s))-f(x(s),u(s))]\,ds=$$
$$=\{\text{см. выше}\}=\varepsilon A_{\tau_2\tau_1}\xi_1+\varepsilon\xi_2+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

$M_1M_2\ldots M_r$:

$$x^*(\tau_2)-x(\tau_2)=\varepsilon(A_{\tau_2\tau_1}\xi_1+A_{\tau_3\tau_2}\xi_2+\ldots+A_{\tau_r\tau_{r-1}}\xi_{r-1}+\xi_r)$$
$$+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)=\varepsilon\xi+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

$$x^*(t_1)-x(t_1)=\varepsilon A_{t_1\tau_2}\xi+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

$$\forall\ \text{Вариация}\ M(\tau,\sigma,v,\varepsilon)\xrightarrow{\text{порождает}}A_{t_1\tau}\xi\equiv\varphi(M)\in E^n$$

$$\Downarrow\quad\varphi:M\to E^n$$

$$x^*(t_1)=x(t_1)+\varepsilon\varphi(M)+\bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

Построим мн-во $K=\bigcup\limits_{(M)}\{\varphi(M)\}$ - конус касательных направлений к мн-ву достижимости в т. $x(t_1)$

фантастический перебор!

узнаем далее $\{$ $x(t_1)\rightsquigarrow$ вершинка конуса, $\varepsilon\varphi(M)$ - построение конуса

Вспомним, что такое конус...

К с центром в т. О
$a \in K \Rightarrow$ луч $Oa \in K$
$a, b \in K \Rightarrow \alpha a + (1-\alpha) b \in K$

Луч тоже образует конус.

Если $K \notin E^n$, то $O \in \partial K$
Если O = нул. т. $\Rightarrow a \in K \Rightarrow \alpha a \in K$, $\forall \alpha > 0$

Докажем, что К – вып. конус.

$$\left.\begin{matrix} M(\tau, \sigma, v, \varepsilon) \\ M'(\tau', \sigma', v', \varepsilon) \end{matrix}\right\} \text{одноч.}$$

Определим операцию "+"

$$1)\ M + M' = \begin{cases} M(\tau; \sigma, \sigma'; v, v'; \varepsilon), & \text{если } \tau = \tau' \\ M'M & \text{, если } \tau' > \tau \end{cases}$$

$$M:\ x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon A_{t_1\tau} \xi + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) = \varepsilon \varphi(M) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

$$M':\ x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon A_{t_1\tau'} \xi' + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) = \varepsilon \varphi(M') + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

$M + M'$: $\underline{\tau = \tau'}$

$$x^*(\tau) - x(\tau) = \varepsilon(\xi + \xi') + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$
$$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon A_{t_1\tau}(\xi + \xi') + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon\left(A_{t_1\tau}\xi + A_{t_1\tau}\xi'\right) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) =$$
$$= \varepsilon(\varphi(M) + \varphi(M')) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon).$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi(M + M') = \varphi(M) + \varphi(M')$$

$$\tau' > \tau \Rightarrow M + M' = M'M$$

$$x^*(\tau') - x(\tau') = \varepsilon(A_{\tau'\tau}\xi + \xi') + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$
$$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon A_{t_1\tau'}(A_{\tau'\tau}\xi + \xi') + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) =$$

в A

$$\Downarrow\ = \varepsilon(A_{t_1\tau}\xi + A_{t_1\tau'}\xi') + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) = \varepsilon(\varphi(M) + \varphi(M')) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$
$$\varphi(M + M') = \varphi(M) + \varphi(M')$$

2) $\mathcal{M}(\tau; \sigma_1 \ldots \sigma_s; \vartheta_1 \ldots \vartheta_s; \varepsilon)$

$\mathcal{M}'(\tau'; \sigma_1' \ldots \sigma_p'; \vartheta_1' \ldots \vartheta_p'; \varepsilon)$

$$\mathcal{M} + \mathcal{M}' = \begin{cases} \mathcal{M}(\tau; \sigma_1 \ldots \sigma_s, \sigma_1' \ldots \sigma_p'; \vartheta_1 \ldots \vartheta_s, \vartheta_1 \ldots \vartheta_p; \varepsilon), & \tau = \tau' \\ \mathcal{M}\mathcal{M}', & \tau' > \tau \end{cases}$$

$\Downarrow$ ... (аналогично)

$\varphi(\mathcal{M} + \mathcal{M}') = \varphi(\mathcal{M}) + \varphi(\mathcal{M}')$

3) Многочленные:

$\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \ldots \mathcal{M}_r = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \ldots + \mathcal{M}_r$

Пусть $\mathcal{M}: \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \ldots \mathcal{M}_S$,
$\mathcal{M}': \mathcal{M}_1' \mathcal{M}_2' \ldots \mathcal{M}_s'$

Можем считать: $\tau_1 = \tau_1', \tau_2 = \tau_2', \ldots, \tau_s = \tau_s'$

почему

$\exists\, \mathcal{M}(\tau; \sigma; \vartheta; \varepsilon)$

$\mathcal{M}_1(\tau_1; \sigma_1; \vartheta_1; \varepsilon) \mathcal{M}_2(\tau_2; \sigma_2; \vartheta_2; \varepsilon), \quad \tau < \tau_1 < \tau_2$

Т.к. $\sigma \geq 0$ сделаем:

$\mathcal{M}(\tau; \sigma; \vartheta; \varepsilon) \mathcal{M}_1'(\tau_1, 0, \vartheta, \varepsilon) \mathcal{M}_2'(\tau_2, 0, \vartheta, \varepsilon)$

ничего не меняется $\mathcal{M}(\tau, 0, v, \varepsilon) \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2$

$\mathcal{M} + \mathcal{M}' = (\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_1') + (\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_2') + \ldots + (\mathcal{M}_s + \mathcal{M}_s')$

||| применяем

$(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_1')(\mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_2') \ldots (\mathcal{M}_s + \mathcal{M}_s')$

$\varphi(\mathcal{M}_i + \mathcal{M}_i') = \varphi(\mathcal{M}_i + \mathcal{M}_i')$ – доказали

$$\varphi(\mathcal{M} + \mathcal{M}') = \sum_{i=1}^{s} \varphi(\mathcal{M}_i + \mathcal{M}_i') = \sum_{i=1}^{s} (\varphi(\mathcal{M}_i) + \varphi(\mathcal{M}_i')) = \sum_{i=1}^{s} \varphi(\mathcal{M}_i) + \sum_{i=1}^{s} \varphi(\mathcal{M}_i') = \varphi(\mathcal{M}) + \varphi(\mathcal{M}')$$

$\Downarrow$

$\varphi(\mathcal{M} + \mathcal{M}') = \varphi(\mathcal{M}) + \varphi(\mathcal{M}')$

Определим операцию "*"

1) $\lambda \mathcal{M}(\tau; \sigma; v; \varepsilon) = \mathcal{M}(\tau, \lambda\sigma, v; \varepsilon)$

$$\varphi(\lambda \mathcal{M}) = \lambda \varphi(\mathcal{M})$$

2) $\lambda \mathcal{M}(\tau; \sigma_1 \ldots \sigma_s; v_1 \ldots v_s; \varepsilon) = \mathcal{M}(\tau; \lambda\sigma_1, \ldots \lambda\sigma_s; v_1, \ldots v_s; \varepsilon)$

3). $\lambda \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 \ldots \mathcal{M}_r = (\lambda \mathcal{M}_1)(\lambda \mathcal{M}_2) \ldots (\lambda \mathcal{M}_r)$

$a \to \varphi(\mathcal{M})$, $a \in K$, $\alpha \geq 0$; $\beta \geq 0$

$\alpha a \to \alpha \mathcal{M}$, $\varphi(\alpha \mathcal{M}) = \alpha a \Rightarrow \alpha a \in K$

$\alpha a + \beta b \to (\alpha \mathcal{M}_1 + \beta \mathcal{M}_2) \Rightarrow \alpha a + \beta b \in K$

$(a, b \in K)$

$\boxed{11.03.14}$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$t \in [t_0, t_1]$

$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon \varphi(\mathcal{M}) + \bar{o}(\varepsilon)$

$\varphi: \{\mathcal{M}\} \to E^n$

$K = \bigcup_{\mathcal{M}} \{\varphi(\mathcal{M})\}$ – вып. конус.

$\varphi(\mathcal{M} + \mathcal{M}') = \varphi(\mathcal{M}) + \varphi(\mathcal{M}')$, $\forall \mathcal{M}, \mathcal{M}'$

$\varphi(\lambda \mathcal{M}) = \lambda \varphi(\mathcal{M})$, $\forall \lambda \geq 0$

Расширенная вариация Макшейна.

$\mathcal{M}$, $\alpha \in E^1$ $(\alpha \neq 0)$

$V(\mathcal{M}, \alpha)$.

$\mathcal{M}$, $t_1 + \varepsilon\alpha = t_1^*$

$u^*(t) = u(t_1)$, $t \in (t_1, t_1+\varepsilon\alpha]$, $\alpha > 0$

$u^*(t) = u(t)$, $t \in [t_1+\varepsilon\alpha, t_1]$, $\alpha < 0$

$$\overset{*}{x}(t) = \overset{*}{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(x^*(s), u(s))ds = x^*(t_1) + (t-t_1)\cdot$$

$$\cdot f(x^*(t_1), u(t_1)) + \bar{o}(\varepsilon) = \{ x^*(t_1) = x(t_1) + \underset{\varepsilon\to 0}{\beta(\varepsilon)} \} =$$

$$= x^*(t_1) + (t-t_1)\cdot f(x(t_1), u(t_1)) + \bar{o}(\varepsilon).$$

$$X^*(t_1^*) \overset{\{t_1^* = t_1+\varepsilon\}}{=} x^*(t_1) + \varepsilon \underbrace{\alpha\cdot f(x(t_1), u(t_1))}_{\text{эффект возмущения}} + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) =$$

$$= x(t_1) + \varepsilon(\varphi(M) + \alpha f(x(t_1), u(t_1))) + \bar{o}(\varepsilon) =$$

$$= x(t_1) + \varepsilon\cdot\varphi(V(M,\alpha)) + \bar{o}(\varepsilon), \text{ где}$$

$$\varphi(V(M,\alpha)) : \underset{\text{вар. Макшейна}}{\underline{\{M,\alpha\}}} \longrightarrow E^n$$

Соберём все точки:

$$\tilde{K} = \bigcup_{\substack{M \\ \alpha\in E^1}} \{\varphi(V(M,\alpha))\}$$ — расширенной конус касательных направлений к МD в т. $x(t_1)$

Лемма 2.

$\tilde{K}$ — выпукл. конус.

◁ (проверить, ввести операцию $+_{u^*}$)

1.] $V(M_1,\alpha_1) + V(M_2,\alpha_2) = V(M_1+M_2, \alpha_1+\alpha_2)$

2.] $\lambda V(M,\alpha) = V(\lambda M, \lambda\alpha)$, $\lambda > 0$

$\Downarrow$

верны мн-ые операции:

$$\varphi(V(M_1,\alpha_1) + V(M_2,\alpha_2)) = \varphi(V(M_1,\alpha_1)) + \varphi(V(M_2,\alpha_2))$$

$$\lambda\varphi(V(M,\alpha)) = \varphi(V(\lambda M, \lambda\alpha)).$$

▷

Посмотрим, что происходит с $\bar{\bar{o}}(\varepsilon)$ в глобальном случае (в лок-ом: $\bar{o}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$)
Немного топологии..

Лемма (о малых деформациях)
$f: M \to E^n,\ M \subset E^n,\ M \in conv\,\Omega(E^n)$
$int\,M \neq \emptyset,\ x_0 \in int\,M$ ($int\,M$ - внутр-ть M)
f-непрерыв. отображение.
$\exists\ \|f(x)-x\| \le \|x-x_0\| \quad \forall x \in \partial M$

Тогда $x_0 \in f(M)$: $\exists x_* \in M: f(x^*)=x_0$

◁ ① $\exists\ M=S_R(0),\quad x_0 \equiv 0$

Построим отоб-ие $g(x)=\underbrace{\Pi_M}_{\text{опер-р проектир. на } M}(x-f(x))$

$x \in M \equiv S_R(0),\ \Pi_M(y) \in S_R(0) \Rightarrow g(x): S_R(0) \to S_R(0)$,
$g(x)$-непр. отображ.

Т. Брауэра: непрер. оператор, переводящий вып. компакт в вып. компакт, имеет неподвижную точку

$\Downarrow$

$\exists$ неподв. т. x_*: $x_*=g(x_*)$

$x_* = \Pi_{S_R(0)}(x_*-f(x_*))$

1). $x_* \in \underset{S_R(0)}{\overset{}{int\,M}} \iff x_* = x_* - f(x_*) \Rightarrow f(x_*)=0$ - ч.т.д.

2). $x_* \in \underset{S_R(0)}{\partial M} \Rightarrow \|x_*-f(x_*)\| \le \|x_*\| \le R \Rightarrow$ (усл. леммы)
$\Rightarrow x_*-f(x_*) \in S_R(0),\ \Pi_{S_R(0)}(x_*-f(x_*)) = x_*-f(x_*)$
$\Rightarrow f(x_*)=0$ - ч.т.д.

Для шарика и куба всё понятно:)

② M - $\forall$ комп. (вып.), $x_0 \in int\,M$
Замена: $y=x-x_0 \Rightarrow M \to M-x_0$
Если $x \in \partial M \Rightarrow y \in \partial\{M-x_0\}$.
$0 \in \partial\{M-x_0\}$

Рассмотрим отображение $p(y)=f(\underset{\overset{\|}{x}}{y+x_0})-x_0$,

тогда $p:\{M-x_0\}\to E^n$

$\exists\, x\in$ ~~int~~ $\partial M \Rightarrow y=x-x_0\in\partial\{M-x_0\}$

$$\|f(x)-x)\|=\|f(x)-x_0+x_0-x\|\cancel{\le\|f(x)-x_0\|+\|x-x_0\|}$$

$$\cancel{=p(y)}=\|f(x)-x_0-(x-x_0)\|=\|p(y)-y\|\le\left\{\begin{matrix}\text{условия}\\\text{леммы}\end{matrix}\right\}$$

$$\le\|x-x_0\|=\|y\|$$

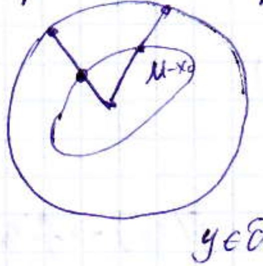
$\Downarrow$

$p(y)$-непрер. отображ., $p:\{M-x_0\}\to E^n$, $0\in\operatorname{int}\{M-x_0\}$,
$\|p(y)-y\|\le\|y\|$ для $\forall y\in\partial\{M-x_0\}$.

Если док-ть $p(y_*)=0\Rightarrow x_0=f(x_*)$, $x_*\in M$

h, $\{M-x_0\}\in\operatorname{conv}\Omega(E^n)\Rightarrow\exists R>0$:
$\{M-x_0\}\subset S_R(0)\Rightarrow h: M-x_0\to B_R(0)$

Строим отображение h:
$\bar{y}=h(y)$



$$h(y)=\begin{cases}0, & y=0\\ \frac{y}{\|y\|}R\cdot\beta, & y\ne0\end{cases}$$

где $\beta=\min\{t\ge0: y\in tM\}$

$y\in\partial\{M-x_0\}\Rightarrow\beta=1$

Получим: $h(y)$ - взаимооднозначн. отоб-ие
$h:\{M-x_0\}\leftrightarrow S_R(0)$; $\bar{y}\parallel y$ и $\|\bar{y}\|\ge\|y\|$

Композиция отображений:
$p\circ h^{-1}: S_R(0)\to E^n$

$\bar{y}\in\partial S_R(0)$ $\quad\|p\circ h^{-1}\bar{y}-\bar{y}\|=\|p(y)-\bar{y}\|=\|p(y)-y+$
$\Rightarrow h^{-1}(\bar{y})=y\in\partial\{M-x_0\}$

$$+y-\bar{y}\|\le\|p(y)-y\|+\|y-\bar{y}\|\le\|y\|+\|y-\bar{y}\|\overset{\{\bar{y}\parallel y \text{ и } \|\bar{y}\|\ge\|y\|\}}{=}\|\bar{y}\|$$

$\Downarrow$ п.1

$\exists \bar{y}_*: \ p \circ h^{-1}(\bar{y}_*) = 0 \Rightarrow y_* = h^{-1}(\bar{y}_*) \in \{M - x_0\}$

$p(y_*) = 0 \Rightarrow \exists x_* \in M: \ f(x_*) = x_0$

хотим эти следствие!

След.1

$f_\varepsilon(x): M \to E^n$, $f_\varepsilon(x)$ – непр.,
$M \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$, $\operatorname{int} M \neq \emptyset$, $x_0 \in \operatorname{int} M$
$f_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightrightarrows} x$ на M
Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0: \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0: x_0 \in f_\varepsilon(M)$

$\exists \beta = \min\limits_{x \in \partial M} \|x - x_0\| > 0$

Из $(\rightrightarrows) \Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0: \ \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ \|f_\varepsilon(x) - x\| \leq \beta, \ \forall x \in M.$

$\exists x \in \partial M: \ \|f_\varepsilon(x) - x\| \leq \max\limits_{x \in M} \|f_\varepsilon(x) - x\| \leq \beta \underset{\text{из опр "}\beta\text{"}}{\leq} \|x - x_0\|$

$\Downarrow$ лемма
$x_0 \in f_\varepsilon(M)$

След.2

$f_\varepsilon(x): M \to E^n$, $f_\varepsilon(x)$ – непр. в M
$M \in \operatorname{conv} \Omega(E^n)$, $\operatorname{int} M \neq \emptyset$,
$P \in \Omega(E^n)$, $P \subset \operatorname{int} M$
$f_\varepsilon(x) \rightrightarrows x$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно на M
Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0: \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad P \subset f_\varepsilon(M)$
(обобщение след.1)

$\exists \beta = \min\limits_{\substack{x \in \partial M \\ x_0 \in P}} \|x - x_0\| > 0$

Берём $\forall x_0 \in P \subset \operatorname{int} M$, $\forall x \in \partial M$ (далее: аналогично след.1)
$\exists \varepsilon_0 > 0: \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ \|f_\varepsilon(x) - x\| \leq \beta, \ \forall x \in M$
$\|f_\varepsilon(x) - x\| \leq \beta \leq \|x - x_0\| \Rightarrow x_0 \in f_\varepsilon(M) \Rightarrow P \subset f_\varepsilon(M)$

Ещё геометрические замечания.

Шар – не так удобно, придумали в нелин. случае симплекс E^n:

$a_0, a_1, \dots a_n, a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ – л/н

$\operatorname{conv}\{a_0, \dots a_n\} = \Pi$ – n-мерный симплекс

$$\Pi = \{\overset{\Downarrow}{a} \in E^n :\ a = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i,\ \ \lambda_i \geq 0,\ \forall i = \overline{1,n},\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}$$

Π - вып. компакт.,
Π ≃ многомерный тетраэдр.
Если всегда одно из $\lambda_i = 0 \Rightarrow (n-1)$-мерный симплекс, граница n-мерн. симплекса.

λ_i – барицентрич. координаты.

Если $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n+1}$ – центр симплекса.

Если $a = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ (убрали $\lambda_i \geq 0$) $\Rightarrow E^n$
причем разложение "a" по "λ_i" единственно.

$$a = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i a_i,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i = 1$$

$$\lambda_0 - \gamma_0 = -\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i)$$

$$\sum_{i=0}^{n} (\lambda_i - \gamma_i) a_i = (\lambda_0 - \gamma_0) a_0 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i) a_i =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i) a_0 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i)(a_i - a_0) = 0$$

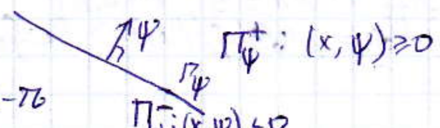
$\Downarrow$ л/н

$\lambda_i = \gamma_i,\ i = \overline{1,n}$
$\lambda_0 = \gamma_0$

$\Downarrow$

непрерывность

ψ, Γ_ψ
гиперпл-ть



A и B отделимы, если $\exists \psi \neq 0 :\ A \in \Pi_\psi^+,\ B \in \Pi_\psi^-$.
Т.е. если $A, B \in \Gamma_\psi \Rightarrow$ они отделимы (даже если $A \cap B \neq 0$)

Если мн-во вып. => можно провести к границе гиперпл-ть: мн-во $\subset \Pi^-_\psi$.

$\boxed{18.03.14}$

$M \in E^n$
$x \in \partial M$

$x \in \Gamma_\psi$, $M \in \Pi_-$
$\psi = x_0 - x$

$\frac{\psi_n}{\|\psi_n\|} \in S$

K – вып. конус с центром в т. O
l – луч с началом в т. O, $l \notin \text{int} K$

K и l отделимы: $\exists \psi \neq 0$
Γ_ψ – разделяет мн-ва K и l,
$K \in \Pi^-_\psi$, $l \in \Pi^+_\psi$

$K - l = \{z \in E^n: \ z = a + (-b), a \in K, b \in l\}$

$K - l \Downarrow$ – вып. конус с центром в нач. коорд. =>

н. коорд. $(0) \in \partial\{K - B\}$ => 0 и $K - l$ отделимы =>

$\psi \neq 0$ $K - l \in \Pi^-_\psi$ => K и l отделимы

$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \ u(\cdot) \in D_u, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$
$u(t), x(t), \ t \in [t_0, t_1]$

Т. 1 (необходимое усл-ие попадания на $\partial X(t_1)$)
$\exists \ x(t_1) \in \partial X(t_1) \Rightarrow 0 \notin \text{int} K$

◁ (от противного)
$0 \in \text{int} K \Rightarrow \exists \Pi_n = \text{conv}\{a_0, \ldots a_n\} = \{a \in E^n: a = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i, \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0\}$, где $\begin{matrix} a_1 - a_0 \\ \vdots \\ a_n - a_0 \end{matrix}$ – л/н.

$\Pi \subset \operatorname{int} K$, 0 - центр симплекса

$\forall a \in \Pi$, $a_i \in K \Rightarrow \exists \mathcal{M}_i : x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon \varphi(\mathcal{M}_i) + \bar{o}(\varepsilon) = \varepsilon a_i + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$

$a \in \Pi \Rightarrow \exists \lambda_0 \ldots \lambda_n,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 :$

$$a = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \longrightarrow \exists \mathcal{M} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathcal{M}_i$$

$$x^*(t_1) - x(t) = \varepsilon \varphi(\mathcal{M}) + \bar{o}(\varepsilon) = \varepsilon a + \bar{o}(\varepsilon)$$

Строим отобр-ие $f_\varepsilon(a) = \dfrac{x^*(t_1) - x(t_1)}{\varepsilon} = a + \dfrac{\bar{o}(\varepsilon)}{\varepsilon}$

$a \in \Pi \in \operatorname{conv} \Omega(E^n) \longrightarrow \mathcal{M}(a)$

$\Rightarrow f_\varepsilon(a) : \Pi \to E^n$, $f_\varepsilon(a) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightrightarrows} a$ равномерн. на Π.

$\Rightarrow$ ~~[след. 2]~~ $\exists r > 0\ S_r(0) \subset \operatorname{int} \Pi \subset K$

$\Downarrow$ след 2

$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0\ S_r(0) \subset f_\varepsilon(\Pi) \Rightarrow \overset{\forall \tilde{a} \in S_r(0)}{\dfrac{x^*(t_1) - x(t_1)}{\varepsilon_0}} = \tilde{a}$

$$X^*(t_1) = x(t_1) + \tilde{a} \varepsilon_0 \in X(t_1) \overset{\tilde{a} \forall}{\Rightarrow} x(t_1) + \varepsilon \cdot S_r(0) \in X(t_1)$$

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ J = \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x, u)\, dt \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot) \in D_u} \end{cases}$$

Проблему с выходом $x(t_1)$ с границы решаем: расширением.

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x \end{pmatrix} \in E^{n+1}$

$\tilde{f} = \begin{pmatrix} f^0 \\ f \end{pmatrix} \in E^{n+1}$

$f(\tilde{x}, u) \equiv f(x, u)$

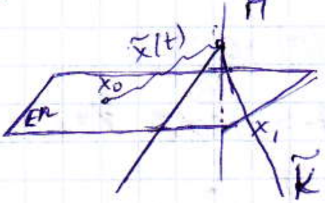
$\dot{x}^0 = f^0(x, u)$

$x^0(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix}$

$$(2)\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x},u)\\ \tilde{x}(t_0)=\begin{pmatrix}0\\x_0\end{pmatrix}, \quad \tilde{x}(t_1)\in \Pi=\left\{\begin{pmatrix}\xi\\x_1\end{pmatrix}, \xi\in E^1\right\}\\ x^0(t_1)\to \min\end{cases}$$ – эквив. задача

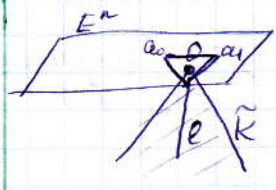
I.2

$\exists$ пара $x(t), u(t)$ $t\in[t_0,t_1]$ – оптим. пара в задаче (1) ($\tilde{x}(t), u(t)$ в зад. (2))
Тогда отриц.-ое напр-ие оси x^0 не может $\in \operatorname{int} \tilde{K}$ (конус в E^{n+1})



$\ell = \begin{pmatrix}-\lambda\\0\\0\end{pmatrix}$, $\lambda\geq 0$ – отриц. напр. оси x^0

$O\equiv\tilde{x}(t_1)$



$\exists\ \ell\in \operatorname{int} K$.
$\exists\ T^n = \operatorname{conv}\{a_0, a_1, \dots a_n\}$, $\{a_i - a_0\}$ – л/н
O – центр симплекса T^n
Сдвигаем сим-кс на h вдоль x_0:
$T^n_h = \operatorname{conv}\{b_0 \dots b_n\}$, где
$b_i = \begin{pmatrix}-h\\a_i\end{pmatrix}$, $i=\overline{0,n}$

При h – большое: $T^n_h \subset \tilde{K}$ (конус вып)
Выберем такое h^*.

$\exists\ \mathcal{Y}$ – оператор проектирование вдоль оси x^0
$\mathcal{Y}(b_i) = a_i$

$$b_i \longrightarrow V(M_i,\alpha_i) : \tilde{x}^*(t_1^*)-\tilde{x}(t_1) = \varepsilon\cdot\varphi(V(M_i,\alpha_i)) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon) = \varepsilon b_i + \bar{o}(\varepsilon)$$

$$\forall b\in T^n_h : \ b = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i b_i, \ \sum_{i=0}^{n}\lambda_i = 1, \ \lambda_i\geq 0, \ i=\overline{0,n}$$

$$b = \begin{pmatrix}-h\\ \sum\limits_{i=0}^{n}\lambda_i a_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-h\\a\end{pmatrix} \Rightarrow a = \mathcal{Y}(b)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi(V(\mathcal{M}_i, \alpha_i)) \longrightarrow V\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathcal{M}_i, \sum_{i=0}^{b} \lambda_i \alpha_i\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{x}^*(t_1^*) - \tilde{x}(t) = \varepsilon \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathcal{M}_i, \sum_{i=0}^{b} \lambda_i \alpha_i\right) + \bar{o}(\varepsilon) = \varepsilon b + \bar{o}(\varepsilon)$$

Тогда $y(\tilde{x}^*(t_1^*) - \tilde{x}(t)) = \varepsilon a + \bar{o}(\varepsilon)$

Строим опер-тор в n-мерн. пр-ве:

$$f_\varepsilon(a) = \frac{y(\tilde{x}^*(t_1^*) - \tilde{x}(t))}{\varepsilon} = a + \bar{o}(\varepsilon)$$

$$\Downarrow$$

$f_\varepsilon(a): T^n \longrightarrow E^n$ и $f_\varepsilon(a) - a \underset{\varepsilon \to 0}{\rightrightarrows} 0$

Знаем, $0 \in \operatorname{int} T^n \Rightarrow$ {след. 1} $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \varepsilon \le \varepsilon_0 : 0 \in f_\varepsilon(T^n)$

$$\exists V(\mathcal{M}_\varepsilon, \alpha_\varepsilon): \frac{y(\tilde{x}(t_1^*) - \tilde{x}(t_1))}{\varepsilon} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x(t_1^*) = x(t_1) \equiv x_1$$

$$x^0(t_1^*) - x^0(t_1) = -\varepsilon h + \bar{o}(\varepsilon) < 0, \text{ - уменьшили ф-ал.}$$

▷

Т.3 $\exists\, x(t_1) \in \partial X(t_1)$, $\exists\, \psi(t) \not\equiv 0$, ψ - сопр. перем.:

$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}$, где $H = (\psi, f(x,u)) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f^i(x,u) = H(x,\psi,u)$

ф-ие Гамильтона-Понтрягина

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* \Big|_{\substack{x = x(t) \\ u = u(t)}} \psi$$

при этом

① $H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), \psi(t), v)$

② $\mathcal{M}(t) = \max_{v \in U} H(x(t), \psi(t), v) = \text{const}$

◁

1. Из т.1 $\Rightarrow \exists \xi \ne 0$: 0 и K отделимы; $0 \in \Pi_\xi^+$, $K \in \Pi_\xi^-$.

м. об отд.
$\Rightarrow (0, \xi) \ge (y, \xi)$, $\forall y \in K$

$$\begin{cases} \xi = \psi(t_1) \ne 0 \overset{\text{решаем}}{\Rightarrow} \psi(t) \ne 0 \\ \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

2. $M(\tau; \sigma; v; \varepsilon)$, τ – произв. т. непрер. у-ие $u(t)$, $\sigma \geq 0$, $v \in U$, $\varepsilon > 0$

$\Downarrow$

$$x^*(t_1) - x(t_1) = \varepsilon\sigma\left(f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))\right) + \bar{\bar{o}}(\varepsilon)$$

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x} y \\ y|_{t=\tau} = \sigma(f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))) \end{cases}$$

$y(t_1) \in K \Rightarrow (y(t_1), \xi) \leq 0 \Rightarrow (y(t_1), \psi(t_1)) \leq 0$,

$t \in [\tau, t_1]$: $(y(t), \psi(t)) = const$ (была такая т. давно)

$\Downarrow$

$(y(t), \psi(t)) \leq 0$, $\forall t \in [\tau, t_1]$

$(y(\tau), \psi(\tau)) \leq 0$

$\left(\sigma(f(x(\tau), v) - f(x(\tau), u(\tau))), \psi(\tau)\right) \leq 0 \quad |: \sigma > 0$

$\Downarrow$

$(f(x(\tau), u(\tau)), \psi(\tau)) \geq (f(x(\tau), v), \psi(\tau))$

$H(x(\tau), \psi(\tau), u(\tau)) \geq H(x(\tau), \psi(\tau), v)$, $\forall v \in U \Rightarrow$

$\Rightarrow H(x(\tau), \psi(\tau), u(\tau)) = \max\limits_{v \in U(\cdot)} H(x(\tau), \psi(\tau), v)$

τ-непр., $\exists \theta$-разрыв управление $\Rightarrow$
берём посл. $t_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \theta - 0$ (и все хорошо)

① доказано

$\boxed{25.03.14}$

3. $M(t) = H(x(t), \psi(t), u(t))$

$\left.\begin{array}{l} x\text{ – непр.} \\ \psi\text{ – непр.} \\ u\text{ – кусоч.-непр.} \\ f(x,u)\text{ – непр.} \end{array}\right| \Rightarrow M(t)$ – кус.-непр.

$\exists \theta$ – т. разрыва ~~$M(t)$~~ управление $u(\cdot)$.
Докажем $M(\theta) = M(\theta - 0) = M(\theta + 0)$ – непрер. в т. разрыва

u-кусоч.-непр. слева: $u(\theta)=u(\theta-0)\neq u(\theta+0)$

$$\mathcal{M}(\theta)=\mathcal{M}(\theta-0)=H(x(\theta),\psi(\theta),u(\theta-0))\overset{①}{\geqslant}$$

$$\geqslant H(x(\theta),\psi(\theta),u(\theta+0))=\mathcal{M}(\theta+0)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{M}(\theta-0)\geqslant\mathcal{M}(\theta+0)$$

$\exists\{\tau_k\}\to\theta+0$

$$\Downarrow$$

$$H(x(\tau_k),\psi(\tau_k),u(\tau_k))\overset{①}{\geqslant}H(x(\tau_k),\psi(\tau_k),u(\theta-0)$$

$$\Downarrow k\to\infty$$

$$\mathcal{M}(\theta+0)\geqslant H(x(\tau_k),\psi(\tau_k),u(\theta-0))=\mathcal{M}(\theta-0)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{M}(\theta+0)\geqslant\mathcal{M}(\theta-0)$$

Значит, $\mathcal{M}(\theta+0)=\mathcal{M}(\theta-0)$

4. $\mathcal{M}(t)\overset{?}{=}const$

$\forall t_2,t_3:\quad t_0\leqslant t_2<t_3\leqslant t_1,\quad u(t)$-непр. на $(t_2,t_3]$

$\forall\tau_0,\tau_1\in(t_2,t_3]$

Принцип max $\Rightarrow$
$$H(x(\tau_0),\psi(\tau_0),u(\tau_0))-H(x(\tau_0),\psi(\tau_0),u(\tau_1))\overset{\geqslant}{}0$$
$$(*)\quad -H(x(\tau_1),\psi(\tau_1),u(\tau_1))+H(x(\tau_1),\psi(\tau_1),u(\tau_0))\leqslant 0$$

Введем: $\mathcal{M}(\tau_0)=H(x(\tau_0),\psi(\tau_0),u(\tau_0))$

$\mathcal{M}(\tau_1)=H(x(\tau_1),\psi(\tau_1),u(\tau_1))$

К $(*)$ $+[\mathcal{M}(\tau_1)-\mathcal{M}(\tau_0)]$:

$$H(x(\tau_1),\psi(\tau_1),u(\tau_0))-H(x(\tau_0),\psi(\tau_0),u(\tau_0))\leqslant\mathcal{M}(\tau_1)-\mathcal{M}(\tau_0)$$
$$(**)\quad\leqslant H(x(\tau_1),\psi(\tau_1),u(\tau_1))-H(x(\tau_0),\psi(\tau_0),u(\tau_1))\ \Big|:\tau_1-\tau_0$$

$\tau_1-\tau_0\to 0$

$$\frac{d}{dt}H(x(t),\psi(t),\underbrace{u(\tau)}_{\text{т. непрер.}})\Big|_{t=\tau}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\dot x+\frac{\partial H}{\partial\psi}\cdot\dot\psi\right)\Big|_{t=\tau}=\left\{\begin{array}{l}H=(\psi,f),\\ \dot x=f,\ \dot\psi=-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*\psi\end{array}\right\}=\left(\psi^*\frac{\partial f}{\partial x}f-f^*\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*\psi\right)\Big|_{t=\tau}=0$$

Тогда при $\tau_1-\tau_0 \to 0$ $(**)$:

$$\frac{M(\tau_1)-M(\tau_0)}{\tau_1-\tau_0} \xrightarrow[t_1-t_0\to 0]{} 0$$

$$\Downarrow$$

M-дифф-ма в $\forall \tau \in (t_2, t_3]$

$M'(t)=0 \Rightarrow M(t)=const$

M-непр., $M=const$ $(t_2,t_3] \Rightarrow M=const$ на $[t_2,t_3]$

Вернемся к основной задаче.

$$(1)\begin{cases} \dot{x}=f(x,u) \\ x(t_0)=x_0 \\ x(t_1)=x_1 \\ J=\int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \dot{\tilde{x}}=\tilde{f}(\tilde{x},u), \ \tilde{x}=\begin{pmatrix} x^0 \\ x \end{pmatrix}\in E^{n+1}, \ \tilde{f}=\begin{pmatrix} f^0 \\ f \end{pmatrix} \\ \tilde{x}(t_0)=\begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix}, \ \tilde{x}(t_1)\in \Pi=\left\{\begin{pmatrix} \xi \\ x_1 \end{pmatrix}, \xi\in E^1\right\} \\ x^0(t_1)\to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(\tilde{x},\tilde{\psi},u)=(\tilde{\psi},\tilde{f}(\tilde{x},u))=\varphi_0 f^0+\psi_1 f_1+\ldots+\psi_n f_n=\psi_0 f^0+H(x,\psi,u)$$

$$\mathcal{M}(\tilde{x},\tilde{\psi})=\max_{v\in U}\mathcal{H}(\tilde{x},\tilde{\psi},v).$$

Т.2 (необходим. усл-ие оптим-ти) ради нее мы так старались

Пусть пара $(x(t),u(t))$, $t\in[t_0,t_1]$ - оптим. пара в (1)

$(\tilde{x}(t),u(t))$ - оптим. пара в (2).

Тогда

$$\exists \tilde{\psi}(t)\neq 0: \ \dot{\tilde{\psi}}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{x}}=-\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial\tilde{x}}\right)^*\tilde{\psi}$$

① $\mathcal{H}(\tilde{x}(t),\tilde{\psi}(t),u(t))=\mathcal{M}(\tilde{x}(t),\tilde{\psi}(t))$, $\forall t\in[t_0,t_1]$

② $\mathcal{M}(\tilde{x}(t),\tilde{\psi}(t))=const$, $t\in[t_0,t_1]$

③ $\psi_0(t)=const$

④ $\psi_0(t_1)\le 0$, $\mathcal{M}(\tilde{x}(t_1),\tilde{\psi}(t_1))=0$

1. $\tilde{x}(t), u(t), \tilde{x}(t_1)\to\tilde{K}$, $\ell\notin \operatorname{int}\tilde{K}\Rightarrow$ ℓ и $\tilde{K}$ отделимы $\Rightarrow \exists \xi\in E^{n+1}$, $\xi\neq 0$, $\ell\in\Pi^+_\xi$, $\tilde{K}\in\Pi^-_\xi$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\varphi}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{x}} \\ \tilde{\varphi}(t_1) = \tilde{\xi} \neq 0 \end{cases}$$

$\tilde{K} = \{ \varphi(V(M, \alpha)) = ..$ $\qquad y = K + \{\alpha \tilde{f}(\tilde{x}(t_1), u(t_1)\}$

$K \subset \tilde{K} \Rightarrow \{$как в т. 1$\}$ ①, ② выполнены (но в расшир. раз-ти)

2. Докажем ③

$$\dot{\tilde{\varphi}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{x}}$$

$$\dot{\varphi}_0(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_0}$$

$$\mathcal{H} = f^0(x,u)\varphi_0 + f^1(x,u)\varphi_1 + .. + f^n(x,u)\varphi_n = \mathcal{H}(x, \tilde{\varphi}, u)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\varphi}_0(t) = 0 \Rightarrow \varphi_0(t) = \mathrm{const}$$

3. $l = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \subset \Pi^+_{\tilde{\xi}} = \tilde{\varphi}(t_1)$

$\forall e \in l \quad (e, \tilde{\xi}) \geq 0 : \; e = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \tilde{\xi} = \tilde{\varphi}(t_1) \Rightarrow$

$$-\varphi_0(t_1) \geq 0$$

$$\varphi_0(t_1) \leq 0$$

$\alpha \tilde{f}(x(t_1), u(t_1)) \in \tilde{K} \subset \Pi^-_{\tilde{\xi}}$, $\quad (y, (\tilde{\varphi}(t_1)) \leq 0 \;\; \forall y \in \tilde{K}$

$\Rightarrow \exists y = \alpha \tilde{f}(x(t_1), u(t_1))$

$$\alpha (f(x(t_1), u(t_1)), \varphi(t_1)) \leq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha > 0 : \; (f(x(t_1), u(t_1)), \varphi(t_1)) \leq 0 \\ \alpha < 0 : \; (f(x(t_1), u(t_1)), \varphi(t_1)) \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\triangleright \; \mathcal{M}(\tilde{x}(t_1), \tilde{\varphi}(t_1)) = (\tilde{f}(x(t_1), u(t_1)), \tilde{\varphi}(t_1)) = 0$$

Замеч.: усл-ие ③ - по построению
усл-ие ④ - на оптимальном упр-ии
усл-ие ② - выход на границу

Будем формулировать т.2 для определенных задач.

Задача быстродействие:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} 1dt = t_1 - t_0 \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$f^0 \equiv 1$

$\mathcal{H} = 1 + \psi_0 + \psi_1 f^1 + \ldots + f^n \psi_n = \psi_0 + H(x,\psi,n)$

$\mathcal{M}(\bar{x},\bar{\psi}) = \psi_0 + \max\limits_{v\in U} H(x,\psi,v) = \psi_0 + M(x,\psi)$

Условие ① т.2:

$\psi_0 + H(x(t),\psi(t),u(t)) = \psi_0 + M(x,\psi)$

$H(x(t),\psi(t),u(t) = M(x(t),\psi(t)),\ \forall t\in[t_0,t_1]$

Условие ② т.2:

$\mathcal{M}(t) = const$

Условие ③ и ④ – выпадают (ψ_0 – лишняя переменная, мы перешли в n-мерн. пр-во)

В чём проблема? $\psi(t)=0$ (!) (всё вып-ся трив-но)

$$\Downarrow$$

$$\exists t_* \in [t_0,t_1]:\ \psi(t_*)=0$$

$\mathcal{H} \equiv 0$ на оптим. тракт. => $\mathcal{M}=0$

$t_*:\ \psi_0 + f^1 \underset{0}{\underset{\parallel}{\psi_1(t_*)}} + \ldots + \underset{0}{\underset{\parallel}{\psi_n(t_*)}} \cdot f^n = \psi_0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{\psi}(t_*) = 0$ – противоречит усл-ию т.2.

Т.3 (необходим. усл-ие оптим-ти в зад. быстродействие)

Пусть пара $(x(t),u(t))$ – опт. пара в зад. быстрод-ия

Тогда $\exists\, \psi(t) \not\equiv 0:\ \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ и

① $H(x(t),\psi(t),u(t)) = M(x(t),\psi(t)),\ \forall t\in[t_0,t_1]$

② $M(t) = const$

самое главное: в теор. этот вывод не так важен

Задача со свободными концами.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ \int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

Немного теории (доп).

$\exists f: E^n \to E^1$

$f(x_1, \dots x_n) = 0$ в E^n

$\exists F = \{x \in E^n: f(x) = 0\}$ - гиперповерхность в E^n

x: $\operatorname{grad} f(x) = \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right\}^*$

$f'(x) \equiv \operatorname{grad} f(x)$,

$x \in F$: $f'(x) = 0$ - особ. точка

Если $\forall x \in F$: $f'(x) \neq 0 \Rightarrow F$ - гладкая гиперпов-ть

Будем рассматривать только гладкие гиперпов-ти

Если $\underbrace{a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b}_{f(x)} = 0 \Rightarrow f'(x) \neq 0 \Leftrightarrow \exists i \in \{1..n\}$ $a_i \neq 0$

и решение $f(x) = 0$ - гиперплоскость.

$F - \forall$ гиперпов-ть, $x_0 \in F \Rightarrow$ гиперпл-ть Π: $x_0 \in \Pi$, $\vec{n} = f'(x_0)$ назыв. касательной гиперпл-тью к гиперпов-ти Π в т. x_0

$\exists$ F_1: $f_1(x_1 \dots x_n) = 0$

...

F_k: $f_k(x_1 \dots x_n) = 0$

$\exists M = \bigcap\limits_{i=1}^{k} F_i$ - ~~гладкое~~ $(n-k)$-мерное многообразие, если $\forall x \in M$ $f_1'(x), f_2'(x), \dots f_k'(x)$ - л/н.

$\Downarrow$

гипер~~пл-ть~~пов-ть F - гладкое $(n-1)$ мерное ~~гипе~~ многообр-ия

$\boxed{1.04.14}$

Вернемся к задаче с подвижн. концами:

$$(1)\begin{cases} \dot x = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \tilde X = \tilde f(x,u) \\ \tilde x(0) = \binom{0}{x_0} \\ x(t_1) \in \Pi = \{\binom{\xi}{x_1} \mid \xi \in E^1\} \\ x^0(t_1) \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} \dot x = f(x,u) \\ x(t_0) \in M_0 \\ x(t_1) \in M_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$f(x_1, \dots x_n) = 0$

$S = \{x \in E^n \mid f(x) = 0\}$

S - гладкая гиперповерхность, если $\forall x \in S$ $\overset{\text{градиент}}{\overrightarrow{f'(x)}} = 0$

$f(x_1, x_2) = 0$ - линия, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ - поверхность

S - глад. гиперпов-ть, $x_0 \in S$, $f'(x_0)$ - вектор нормали

$x_0 \in \Gamma$, $\vec n = f'(x_0)$ - касат. гиперпл-ть к гиперпов-ти Γ в т. x_0

$S_1 : s_1(x_1, \dots x_n) = 0$

$\vdots$

$S_k : s_k(x_1, \dots x_n) = 0$

$\underbrace{M}_{\text{многообразие}} = \bigcap\limits_{i=1}^{k} S_i$ - $(n-k)$-мерное гладкое многообразие, если $\forall x \in M$ $f_1'(x), \dots, f_k'(x)$ - л/н

$f(x) = 0$ - $(n-1)$-мерное гл. многооб-ие.

M – $(n-k)$-мерная пл-ть

$x_0 \in M$, $L_1 \ni x_0$, $\vec{n}_1 = f_1'(x_0)$, $L_2 \ni x_0$, $\vec{n}_2 = f_2'(x_0)$, ...

$(n-k)$-мерн. $L = \bigcap\limits_{i=1}^{k} L_k$ – касат. пл-ть к глад. многообр-ию M в т. x_0

Ǝ M_0 – глад. многообразие размерности r_0
M_1 – глад. мн-ие размерности r_1 $\rightsquigarrow$ в (3) задача

$x_0 \in M_0$, $x_1 \in M_1$
$(x(t), u(t))$ – оптим. реш. в зад. (3).

$(\bar{x}(t), u(t))$
$\exists \bar{\psi}(t) \neq 0: \quad \dot{\bar{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \Rightarrow$ ①, ②, ③

Ǝ T_0 – касат. пл-ть к глад. многооб-ию M_0 в т. x_0.

$\dim T_0 = r_0 < n$
Ǝ T_1 – касат. пл-ть к гл. мн-ию M_1 в т. x_1
$\dim T_1 = r_1 < n$

$\bar{\psi}(t)_0$ удовлет-ет условию трансвер-ти на левом конце, если $\psi(t_0) = (\psi_1(t), \ldots \psi_n(t_0))$: $\psi(t_0) \perp T_0$
Аналогично на правом конце.

$\Theta_1, \ldots \Theta_n$
$(\psi(t_0), \Theta_i) = 0$, $i = \overline{1,n}$, аналогично на правом конце.

Т.1

Ǝ $(x(t), u(t))$ – оптим. пара в зад. (3).
Тогда $\exists \psi(t) \neq 0$: $\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ и
① $\forall t \in [t_0, t_1]$: $H(x, \bar{\psi}, t) = M(x, \bar{\psi})$
② $M(\bar{x}, \bar{\psi}) = 0$
③ $\psi_0(t) = const$, $\psi_0(t_1) < 0$
④ выполнено усл-ие трансверсальности с $\bar{\psi}(t)$ в концах траектории.

Неавтономн. система

$$(4)\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u,t)\,dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = \tilde{f}(x,u,t) \\ \tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix} \\ \tilde{x}(t_1) \in \Pi \\ x^0(t_1) \to \min \end{cases}$$ – ввели доп. коорд. x^{n+1}

где $x^* = \{x_1 \dots x_n, x^{n+1}\}^T$

$\dot{x}^{n+1} = 1$, $x^{n+1}(t_0) = t_0 \Rightarrow x^{n+1} = t$

$x^* = \begin{pmatrix} x \\ x^{n+1} \end{pmatrix}$, $f^* = \begin{Bmatrix} f \\ 1 \end{Bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{x}^* = f(x,u,x^{n+1}) \equiv f(x,u) \\ x^*(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \underset{x''_{n+1}(t_0)}{t_0} \end{pmatrix}, \\ x^*(t_1) \in M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \xi \end{pmatrix} \right\}, \quad M_1 \parallel \text{оси } x^{n+1} \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u,x^{n+1})\,dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$\Downarrow$

зад. (3):

$$\mathcal{H}^*(x,\psi^*,u,x^{n+1}) = \psi_0 \cdot f^0(x,u,x^{n+1}) + \dots + \psi_n \cdot f^n(x,u,x^{n+1}) + \psi_{n+1} \cdot 1 = \mathcal{H}(x,u,\psi,t) + \psi_{n+1} \quad (5)$$

$\exists\,(x(t), u(t))$ – оптим. пара в зад. (4)

Тогда $\exists\,\tilde{\psi}^*$: $\dot{\psi}^* = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial x}$

① принцип max: $\dot{\psi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$, $\dot{\psi}_{n+1} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} =$
$= -\sum\limits_{\alpha=0}^{n} \frac{\partial f^\alpha}{\partial t}(x,u,t) \cdot \psi_\alpha$

$\mathcal{H}^*(x(t), \psi^*(t), u(t), x^{n+1}(t)) = \mathcal{M}^*(x(t), \psi^*(t), x^{n+1}(t))$

. 11

$\mathcal{H}(x(t),u(t),\tilde{\psi}(t),t)+\psi_{n+1}(t)=\mathcal{M}(x(t),\tilde{\psi}(t),t)+\psi_{n+1}(t), \quad \forall t\in[t_0,t_1]$

принцип max: $\boxed{\mathcal{H}(x(t),u(t),\tilde{\psi}(t),t)=\mathcal{M}(x(t),\tilde{\psi}(t),t) \quad \forall t\in[t_0,t_1]}$

② $\psi_0(t_1)\le 0$, $\psi_0(t)=const$

$\psi^*(t_1)=(\psi_1(t_1),\dots\psi_n(t_1),\psi_{n+1}(t))$

$\tilde{\theta}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

$\psi_{n+1}(t_1)=0$

$\psi_{n+1}(t)=\int_{t_0}^{t}-\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial t}(x,u,t)\cdot\psi_{\alpha}$

$\mathcal{H}^*(t)\equiv 0 \Rightarrow \mathcal{M}(x(t),\tilde{\psi}(t),t)=-\psi_{n+1}(t)$

$\mathcal{M}(x(t_1),\tilde{\psi}(t_1),t_1)=0$

$] \ \exists t_*\in[t_0,t_1]: \psi_0(t_*)=\psi_1(t_*)=\dots=\psi_n(t_*)=0 \Rightarrow$

$\mathcal{H}^*(t_*)\equiv 0 \Rightarrow \psi_{n+1}(t_*)=0 \Rightarrow \psi^*(t_*)=0$ – противоречие!

$\Rightarrow \exists\tilde{\psi}(t)\ne 0$

T. –11– в зад. (4)

Тогда $\exists \ \tilde{\psi}(t)\ne 0$: $\dot{\tilde{\psi}}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\tilde{x}}$, $\mathcal{H}(x,\tilde{\psi},u,t)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i\cdot f^i(x,u,t)$

и

① $\mathcal{H}(x(t),\tilde{\psi}(t),u(t),t)=\mathcal{M}(x(t),\tilde{\psi}(t),t)$, $\forall t\in[t_0,t_1]$

② $\mathcal{M}(x(t),\tilde{\psi}(t),t)=\int_{t_0}^{t}\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial t}\psi_{\alpha}\,dt$

③ $\psi_0(t)=const$

$\psi_0(t_1)\le 0$

$\mathcal{M}(x(t_1),\tilde{\psi}(t_1),t_1)=0$

Неавтономн. зад. с закреп. ~~конечн~~ время t_1

$$(5)\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,u,t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1, \quad t_1 - \text{фиксир.} \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0[x(t), u(t), t]dt \longrightarrow \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$$\exists x^* = \begin{pmatrix} x \\ x^{n+1} \end{pmatrix}, \quad \dot{x}^{n+1}(t) = 1, \quad x^{n+1}(t_0) = t_0, \quad f^* = \begin{pmatrix} f \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^* = f^*(x^*, u) \\ x^*(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix}, \; x^*(t_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ t_1 \end{pmatrix} \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x^*, u)dt \rightarrow \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}^* = \psi_0 f^0 + \ldots + \psi_n \cdot f^n + \psi_{n+1} \cdot 1$$

вып. всюду

$$\mathcal{H}[\tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), u(t), t] = \mathcal{M}(x(t), \psi(t), t), \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\mathcal{M}(x(t), \tilde{\psi}(t), t) = -\psi_{n+1}(t).$$

Т. −||− в зад. (5)

$\Rightarrow \exists \; \tilde{\psi}(t) \neq 0 : \; \dot{\tilde{\psi}}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$ и

① $\mathcal{H}(x(t), \tilde{\psi}(t), u(t)) = \mathcal{M}(x(t), \tilde{\psi}(t), t)$

② $\psi_0(t) = const, \quad \psi_0(t_1) = 0$

Время закрепл., концы − подвижные:

$$(6)\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ x(t_0) \in \mathcal{M}_0, \; x(t_1) \in \mathcal{M}_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)dt \rightarrow \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

$\Downarrow$

Т. $\overset{(\text{в зад. } 6)}{-||-}$ и

① −||−

② −||−

③ выполнено условие трансвер-ти на левом и правом концах

Свободн. правый конец, закрепл. время.

$$(7)\begin{cases} \dot x(t)=f(x(t),u(t),t) \\ x(t_0)=x_0\ ,\ x(t_1)\in E^n \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t),u(t),t)\,dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

Введём x^{n+1} => {см. ранее}

=> $\tilde\psi(t_1)$ - удовл. усл. трансвер-ти: $\psi(t_1)\perp E^n \Rightarrow \psi(t_1)=0$

$\tilde\psi(t)\neq 0 \Rightarrow \psi_0(t_1)<0$, считаем $\psi_0(t_1)=-1$

$\Downarrow$

Т. —||— в зад. (7)

Тогда $\exists$ —||— и

①

② $\tilde\psi(t_1)=(-1,0,\dots 0)^T$

$\boxed{8.04.14}$

Метод динамич. программирования
(метод Беллмана)

$F(x) \to \min_{x\in X} (P)$

① Метод погружения

$f(x,\alpha) \to \min_{x\in Y(\alpha)} (P_\alpha) \rightsquigarrow$ "отпускаем α"

$\alpha=\alpha_0 : f(x,\alpha_0) \equiv F(x)$

$Y(\alpha_0) = X$

$L(\alpha) = \min_{x\in Y(\alpha)} f(x,\alpha)$

$V(\alpha) = -L(\alpha)$ ~ ф-ия Беллмана

② Принцип оптимальности

∀ кусок оптим. траектории оптимален

③ 1,2 ⇒ у-ие Беллмана

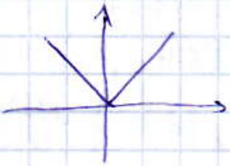
Пример.

$f_1(x) = x, \ f_2(x) = -x$

$\max\{f_1, f_2\} = |x|$

$\Downarrow$

теряем гладкость



I Зад. быстр-ие в нелин. случае.

$$\begin{cases} \dot x = f(x,u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases} \quad (P)$$

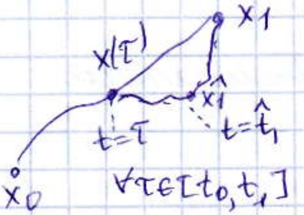
① "Отпустим x_0": $\rceil\ \cancel{x_0}\ \alpha \doteq x_0 \in E^n$

$$\begin{cases} \dot x = f(x,u) \\ x(t_0)=\alpha \\ x(t_1)=t_1 \\ t_1 - t_0 \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases} \quad (P_\alpha)$$

Предполож. 1. $\exists T(\alpha)$ $\forall \alpha \in E^n$ → время перехода
$T(x_1)=0$, $T(\alpha)<0$, $\alpha \neq x_1$

$]\ V(\alpha) = -T(\alpha) < 0$
Предположе. 2. $V(\alpha)$ - непр. E^n
$\exists V'(\alpha)$ - непр. на $E^n\setminus\{x_1\}$

$]\ u(t), x(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ - оптим. пара из x_0 в x_1
$\forall$ хвост ОТ оптимален, т.к.



$\forall \tau\in[t_0,t_1]$

$$\begin{cases} \dot x = f(x,u) \\ x|_{t=\tau} = x(\tau) \\ x|_{t=t_1} = x_1 \\ t_1 - \tau \to \min\limits_{u(\cdot)\in} \end{cases}$$

$\hat u(t), \hat x(t)$, $\tau \le t \le \hat t_1$
$\hat x|_{t=\tau} = x(\tau)$
$\hat x|_{t=\hat t_1} = x_1$

$\forall \tau \in (t_0, t_1)$

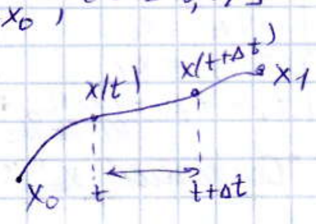
$$]\ u_*(t) = \begin{cases} u(t), & t\in[t_0,\tau] \\ \hat u(t) & t\in(\tau,\hat t_1] \end{cases} \Rightarrow (x_*(t), u_*(t)) \text{ - доп. процесс}$$

$$]\ x_*(t) = \begin{cases} x(t) \\ \hat x(t) \end{cases}$$

$]\ u(t), x(t)$ - опт. процесс в $(P_\alpha)|_{\alpha=x_0}$, $t\in[t_0,t_1]$

② $t\in(t_0,t_1)$, $t+\Delta t \in (t_0,t_1)$

$T(x(t)) = \Delta t + T(x(t+\Delta t))$



$$\frac{T(x(t)) - T(x(t+\Delta t))}{\Delta t} = 1$$

$$\frac{V(x(t+\Delta t)) - V(x(t))}{\Delta t} = 1$$

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} V(x(t)) = 1$

$(V'(x(t)), \dot{x}(t)) = 1$, $t \in [t_0, t_1)$, t - точка непр. упр-ие $u(\cdot)$

$$\boxed{(V'(x(t)), f(x(t), u(t))) = 1, \ \forall t \in [t_0, t_1)}$$

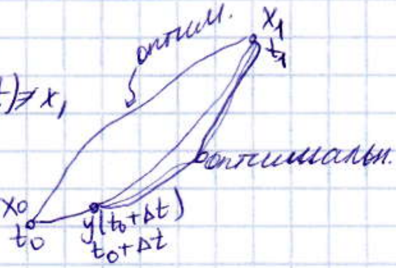
$t = t_0 \Rightarrow (V'(\underbrace{x_1(t_0)}_{x_0}), f(x_0, u(t_0))) = 1 \quad \forall x_0 \neq x_1$

$t = t_0$, $x(t_0) = x_0$

$(t_0, t_0 + \Delta t)$, $u(t) = v$, $y(t_0+\Delta t) \neq x_1$

$T(x(t_0)) \leq \Delta t + T(y(t_0+\Delta t))$

$$\frac{V(y(t_0+\Delta t)) - V(\overbrace{x(t_0)}^{x_0})}{\Delta t} \leq 1$$



$\Delta t \to +0$

$y(t_0+\Delta t) = y(t_0) + \dot{y}(t_0)\Delta t + \bar{\bar{o}}(\Delta t) = x_0 + f(x_0, v)\Delta t + \bar{\bar{o}}(\Delta t)$

$(V'(x_0), f(x_0, v)) \leq 1$, $\forall x_0 \in E^n \setminus \{x_1\}$, $\forall v \in U$

$\max\limits_{v \in U} (V'(x), f(x, v)) \leq 1$

$$\begin{cases} \max\limits_{v \in U} (V'(x), f(x, v)) = 1 \\ V(x_1) = 0 \end{cases}$$

У-ие Беллмана

$$\begin{cases} \max\limits_{u \in U} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x, v) \\ V(x_1) = 0 \\ V(x) < 0 \end{cases}$$

Нет еще $\frac{1}{2}$ лекции

$\boxed{15.04.14}$

3 идеи в динам. пр-ии:

① Погружение

② Принцип оптим-ти

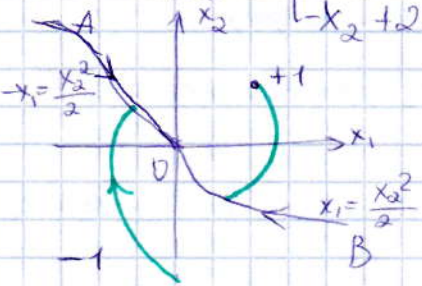
③ Вывод УБ

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + u \\ x(0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \\ x(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ T \to \min \end{cases}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$|u_2| \le 1$

$u_1 = 1$

$$-T(x_1 x_2) = \begin{cases} x_2 + 2\sqrt{x_1 + \frac{x_2^2}{2}}, & (x_1, x_2) \text{ выше } AOB \\ -x_2 + 2\sqrt{-x_1 + \frac{x_2^2}{2}}, & (x_1, x_2) \text{ ниже } AOB \end{cases}$$



$V(0,0) = 0$

Пр. 1 $V(x_1, x_2)$ - непр.

Пр. 2 $\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^*$ - непр в $E^2 \setminus \{0\}$ $\Big\}$ - верна не предположение для дин. пр-ия

Нет: $\frac{\partial V}{\partial x_1} \neq \frac{\partial V}{\partial x_2}$,

Предп. 3 V''_{xx} - тем более не верно.

$$P \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \\ L = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x, u)\,dt \to \min\limits_{u(\cdot) \in \mathcal{D}_u} \end{cases}$$

$\exists t_0$ и t_1 - фиксир

1). Погружение:

отпускаем x_0 и t_0:

$\alpha = (x_0, t_0)$, $\alpha = (y, \tau)$, $y \in E^n$, $\tau \in \cancel{[t_0, t]}[t_0, t_1]$

$$P_1 \begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x(\tau) = y \\ x(t_1) = x_1 \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u)dt \to \min \end{cases} \qquad y = x_0,\ \tau = t_0$$

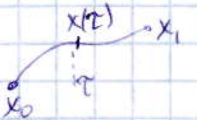
$$\mathcal{L}(y,\tau) = \min_{u \in D_u} L$$

$$V(y,\tau) = -\mathcal{L}(y,\tau)$$

$] \exists \mathcal{L}(y,\tau)$ на $W = E^n \times [t_0, t_1]$,
$W^0 = \operatorname{int} W \neq \emptyset$
$(x_1, t_1) \in \partial W$

<u>Пр.1</u> $\mathcal{L}(x,t)$ — опред. и непр на W

<u>Пр.2</u> на W^0 $\frac{\partial \mathcal{L}(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathcal{L}(x,t)}{\partial t}$ — непрер



$] x(t), u(t), t \in [t_0, t_1]$ — опт. пара в P
$] \tau \in (t_0, t_1)$

2). Док-ем: $\forall$ хвост оптим. траектории оптимален.

$$\hat{P} \begin{cases} \dot{x} = f(x,u) \\ x|_{t=\tau} = x(\tau) \\ x|_{t=t_1} = x_1 \\ L = \int_\tau^{t_1} f^0(x,u)dt \to \min\limits_{u(\cdot) \in D_u} \end{cases}$$

$] \exists \hat{u}(t), \hat{x}(t)$ — оптим. реш $\hat{P}$ на $t \in [\tau, t_1]$ и

$$\hat{L} = \int_\tau^{t_1} f^0(\hat{x}(s), \hat{u}(s))ds < \int_\tau^{t_0} f^0(x(t), u(t))dt$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{L_\tau}$$

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [t_0, \tau) \\ \hat{u}(t), & t \in (\tau, t_1] \end{cases}$$

$$x_*(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [t_0, \tau) \\ \hat{x}(t), & t \in (\tau, t_1] \end{cases}$$

$$L_* = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x_*, u_*)\,dt = \int_{t_0}^{\tau} f^0(x(t), u(t))\,dt + \int_{\tau}^{t_1} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\,dt$$

$$< \int_{t_0}^{\tau} \ldots + \int_{\tau}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))\,dt = L$$

противоречие!

3). $x(t), u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ – оптим. пр-сс, $(x(t), t) \in W^0$, $t \in (t_0, t_1)$

$t \in (t_0, t_1)$, $t + \Delta t \in (t_0, t_1)$,

t – т. непрер. у-ие $u(\cdot)$

$$L(x(t), t) = \int_{t}^{t_1} f^0(x(s), u(s))\,ds = \int_{t}^{t+\Delta t} f^0(x(s), u(s))\,ds + \int_{t+\Delta t}^{t_1} f^0(x(s), u(s))\,ds \overset{\text{принц. опт-ти}}{=} \int_{t}^{t+\Delta t} f^0(x(s), u(s))\,ds + L(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{V(x(t+\Delta t), t+\Delta t) - V(x(t), t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} f^0(x(s), u(s))\,ds$$

$$\Downarrow \lim_{\Delta t \to \infty}$$

$$\frac{d}{dt} V(x(t), t) = f^0(x(t), u(t))$$

$$\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x} \cdot \underbrace{\dot{x}}_{f(x(t), u(t))} = f^0(x(t), u(t)), \quad \forall t \in (t_0, t_1)$$

$$\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(x(t), t)}{\partial x}, f(x(t), u(t)) \right) - f^0(x(t), u(t)) = 0 \quad \forall t \in (t_0, t_1)$$

↳ необход. и достат. у-ие оптим-ти

I $\forall u(t) = v \in U$

⇓ (проделаем то же), только знак "≤" вместо "=", т.к. не оптим. упр-ие)

у-ие Беллмана
$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \max\limits_{u \in U} \left\{ -f^0(x,u) + \left(\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial x}, f(x,u) \right) \right\} = 0 \\ V(x_1, t_1) = 0 \end{cases}$$

↳ "зверское у-ие"!

Пр.3 $\underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial t}}_{\text{непр на } W^0}$ => можно вывести принцип max

Ещё один рез-т, полученный на кафедре ОУ Киселёвым!

[Оптим. пр-сс] => [ПМП]

Хотим: <= => добавим условие!

Теорема о достат. у-иях оптим-ти в терминах конструкций ПМП

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t) \\ x(t_0) = x_0 \\ \int_{t_0}^{t_1} f^0(x,u,t)dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases}$$

t_0, t_1 – фиксир

$$\tilde{\psi}(t_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \psi_0 = 1, \ \psi(t_1) = 0$$

$$\mathcal{H}(x,\psi,u,t) = -f^0(x,u,t) + (\psi(t), f(x,u,t))$$

$$M(x,\psi,t) = \max_{u\in U} \mathcal{H}(x,\psi,u,t)$$

$$\mathcal{H}(x(t),\psi(t),u(t),t) = M(x(t),\psi(t),t), \ \forall t\in[t_0, t_1]$$

Пр.1 $\exists!$ максимизатор ф-ии Г-П:

$$\max_{u\in D_u} \mathcal{H}(x,\psi,u,t) = \mathcal{H}(x,\psi,u_*(x,\psi,t),t)$$

$u_*(x,\psi,t)$ – $\exists u!$ $\forall (x,\psi,t)$

Краев. задача ПМП:

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi} = f(x,u,t)\big|_{u=u_*(x,\psi,t)} \equiv F(x,\psi,t)$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial f^0}{\partial x}(x,u,t) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* \psi \big|_{u=u_*(x,\psi,t)} \equiv G(x,\psi,t)$$

Краев. у-ие $\begin{cases} x(t_0)=x_0 \\ \psi(t_1)=0 \end{cases}$

$\exists x(t), \psi(t)$ реш. краев. зад. ПМП

Пр.2. $\exists$ реш. краев. зад. ПМП $x(t), \psi(t), t\in[t_0,t_1]$

$$u(t)=u_*(x,\psi,t)\Big|_{\substack{x=x(t)\\ \psi=\psi(t)}}$$

$\Downarrow$

$x(t), u(t), t\in[t_0,t_1]$ - удовл. ПМП

Получим $\{x(t), \psi(t), u(t)\}, t\in[t_0,t_1]$ - экстремальная тройка.

Удовлетворяет ли пара $x(t), u(t)$ → Оптимальности?
Добавим условия

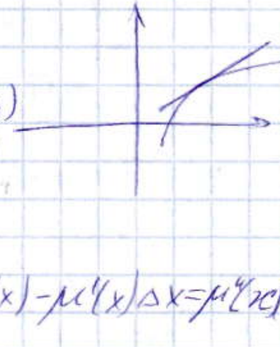
часто выполняется

① Пр.3 $M(x,\psi,t)$ - имеет непр. $M'_x(x,\psi,t)$ на $E^n\times E^n\times E^n$ (по совокупности)

② Пр.4 $\dot\psi=-M'_x(x,\psi,t)$

③ Пр.5 $m(t,x)\equiv M(t,x,\underset{\text{реш. краев. зад.}}{\psi(t)})$ - вогнута по x при всех t

Про вогнутость: $\mu(x), x\in X$ X-вып.
$\mu(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\lambda\mu(x_1)+(1-\lambda)\mu(x_2)$
$\forall x_1,x_2\in X$, $\forall\lambda\in[0,1]$



Если $x, x+\Delta x\in X$
$\mu(x+\Delta x)-\mu(x)\leq\mu'(x)\Delta x$
Если достат. гладкость: $\mu(x+\Delta x)-\mu(x)-\mu'(x)\Delta x=\mu''(\tilde x)\Delta x^2\leq 0$

$\exists\,\mu:E^n\to E^1 \Rightarrow \forall x, x+\Delta x\in E^n\equiv X$
$\mu(x+\Delta x)-\mu(x)-(\mu'(x),\Delta x)\leq 0$

В силу вогнутости:

$$\mathcal{M}(t, x+\Delta x, \psi(t)) - \mathcal{M}(t, x, \psi(t)) - (\mathcal{M}'_x(t, x, \psi(t)), \Delta x) \le 0$$
$$\forall x,\ x+\Delta x \in E^n$$

$$\boxed{22.04.14}$$

Т. $x(t),\ u(t) = u_*(x, \psi, t)\Big|_{\substack{x = x(t)\\ \psi = \psi(t)}}$ — решение ПМП.

При выполнении пр. 1 - пр. 5 $x(t), u(t),\ t \in [t_0, t_1]$ оптим. пара.

◁ $\exists\ \hat{x}(t), \hat{u}(t),\ t \in [t_0, t_1]$ — произвольный допуст. процесс,

т.е. $\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t),\ t \in [t_0, t_1],\ \hat{x}(t_0) = x(t_0) \overset{?}{=} x_0$

$$L(\hat{u}(.)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)\,dt$$

$\Delta u = \hat{u}(t) - u(t),\quad \Delta x = \hat{x}(t) - x(t),\quad \Delta L = L(\hat{u}(.)) - L(u(.))$

Надо показать: $\Delta L \ge 0$.
$-\Delta L \le 0$

$$0 = (\psi(t), \Delta x(t))\Big|_{t=t_0}^{t_1} \ominus \{\psi(t_1) = 0,\ \Delta x(t_0) = 0\} \Rightarrow \text{верно равенство}$$

$$\ominus \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\psi(t), \Delta x(t))\,dt = \int_{t_0}^{t_1} [(\dot{\psi}, \Delta x(t)) + (\Delta\dot{x}, \psi(t))]\,dt = \{\text{пр. } 4\} = \int_{t_0}^{t_1} [-(\mathcal{M}'_x(x(t), \psi(t), t), \Delta x(t)) + (\dot{\hat{x}}(t), \psi(t)) - (\dot{x}(t), \psi(t))]\,dt \ominus$$

$$(\dot{\hat{x}}(t), \psi(t)) = (f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t), \psi(t)) = \\ = f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) + \mathcal{H}(\hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t), t).$$

$$\ominus \int_{t_0}^{t_1} [-(\mathcal{M}'_x, \Delta x) + \mathcal{H}(\hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t), t) - \mathcal{H}(x(t), \psi(t), u(t), t)]\,dt + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} f^0(\hat{x}, \hat{u}(t), t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t), t)\,dt}_{\Delta L} \Rightarrow$$

$$-\Delta L = \int_{t_0}^{t_1} \Big[\mathcal{H}(\hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t), t) - \mathcal{M}(x(t), \psi(t), t) - (\mathcal{M}'_x(x(t), \psi(t), t), \Delta x(t)) \Big] dt \le \int_{t_0}^{t_1} \Big[\mathcal{M}(\hat{x}(t), \psi(t), t) - \mathcal{M}(x(t), \psi(t), t) - (\mathcal{M}'_x(x(t), \psi(t), t), \Delta x(t)) \Big] dt \le 0$$

{вогнутость $\mathcal{M}$}

▷

Замечание:

1. всё верно и для задачи с $x(t_1) = x_1$

2. Если $L = \underbrace{\int_{t_0}^{\infty}}_{\text{бесконечный горизонт}} f^0 dt \to \min$ и $\psi(\infty) = 0 \Rightarrow$ тоже всё верно.

{* Теория is over!* }

Пример 1. Линейно-квадр задача ОУ.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \\ J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^*_{(t)} Q x(t) + \underset{\displaystyle u^*(t) R u(t),\ \text{где } R = E}{\underset{|||}{\|u(t)\|^2}}) dt \end{cases}$$

$A = (n \times n)$
$B = (n \times r)$
$Q = Q^* \geqslant 0$
$R > 0$, $R = E > 0$
T - фиксир.
$U = E^2$

1. $\mathcal{H}(x, \psi, u) = \{\underset{\text{своб. конец}}{\psi_0 = -1}\} = -\frac{1}{2}(x^* Q x + \|u\|^2) + (\psi, Ax + Bu)$

$\mathcal{H}'_u = -u + B^* \psi = 0$

$u_*(x, \psi, t) = u_*(\psi) = +B^* \psi$, т.к. $\mathcal{H}''_{uu} = \underset{(+B^*\psi) - \max.}{-E_{r \times r} > 0} \Rightarrow$

2. $\mathcal{M}(x, \psi) = -\frac{1}{2}(x^* Q x + \underbrace{\overset{\displaystyle u^* u}{\overset{\shortparallel}{\psi^* B B^* \psi}}}_{\|B^* \psi\|^2}) + (\psi, Ax) + (\psi, \underset{\displaystyle \psi^* B B^* \psi}{\underset{\shortparallel}{BB^* \psi}}) =$

$$= -\frac{1}{2} x^* Q x + \frac{1}{2} \|B^*\psi\|^2 + (A^*\psi, x).$$

3.

$$\mathcal{M}'_x = -Qx + A^*\psi$$

$$\dot\psi = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(-Qx + A^*\psi) = -\mathcal{M}'_x(x,\psi)$$ — Пр. 4 верно

$$\mathcal{M}''_{xx} = -Q \le 0 \Rightarrow \mathcal{M}$$ — вогнута по x — Пр. 5 верно.

⇓ выполнение Пр. 1-5

ПМП — решение

Краев. зад. ПМП.

$$\begin{cases} \dot x = Ax + B\overbrace{B^*\psi}^{u_*} \\ \dot\psi = Qx - A^*\psi \\ x(0) = x_0 \\ \psi(T) = 0 \end{cases}$$

} линейная

$\psi(T)=0$ ⇝ у-ие трансверсальности.

Лемма.

Решение краев. зад. ПМ !

$$(*) \begin{cases} \dot x = Ax + BB^*\psi \\ \dot\psi = Qx - A^*\psi \\ x(0) = 0 \\ \psi(T) = 0 \end{cases}$$

Покажем, что реш. этой задачи только $x(t)\equiv 0$, $\psi(t)\equiv 0$ ⇒ ⇒ решение исходной !

Матричное дифф-ое у-ие Риккати:

$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$ — у-ие Риккати

$$\begin{cases} \dot P = -Q - PA - A^*P + PBB^*P, \text{ где } P = P^*(t),\ (n\times n) \\ P(T) = 0 \end{cases}$$

⇓ методом оценок, очень тонкая работа =)

$\exists!\ P(t)$, $t \in [0, T]$

Рассмотрим $z(t) = \psi(t) + ~~x(t)~~ P(t)x(t)$, где $x(t)$, $\psi(t)$ — реш. (*)

$z(t) \equiv 0$, т.к.

$z(T) = \underset{0}{\psi(T)} + \underset{0}{P(T)} \cdot x(T) = 0$

$\dot z = \dot\psi + \dot P x + P \dot x = Qx - A^*\psi + (-Q - PA - A^*P + PBB^*P)x +$

$+ P(Ax + BB^*\psi) = \{\psi = z - Px\} =$

$= -A^*(z - Px) - A^*Px + PBB^*Px + PBB^*(z - Px) =$

$= -A^*z + PBB^*z$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \dot z = (-A + PBB^*)z \\ z(T) = 0 \end{cases}$ — лин. зад. Коши $\Rightarrow z(t) \equiv 0 \Rightarrow$

$\psi(t) = -P(t) \cdot x(t)$

$\begin{cases} \dot x = Ax + BB^*(-P(t)x) = (A - BB^*P(t))x \\ x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi(t) \equiv 0$

$\Downarrow$

решение (*) ! и $x(t) = 0$, $\psi(t) = 0 \Rightarrow$
решение КЗПМ тоже !.

4. Ищем реш. КЗПМ

$\exists z(t) = \ldots, \overset{\text{аналогично}}{\Rightarrow} z(t) \equiv 0 \Rightarrow \psi(t) = -P(t)x(t)$

$\Downarrow$

$(***) \begin{cases} \dot x = (A - BB^*P(t))x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \ldots$

$\psi(t) = -P(t)x(t).$

Применение метод прогонки:

1. решаем матр. у-ие Риккати: нашли $P(t)$. $t \in [0, T]$ ←
2. решаем зад Коши (***) вперёд: $x(t)$
3. находим $\psi(t) = -P(t)x(t)$, $u(t) = B^*\psi(t)$

$\boxed{29.04.14}$

Задача Дусе (задача о нагреве чайника

$\boxed{\text{Скорость изм-ия температуры}} = \boxed{\text{Подача газа}} - \boxed{\text{Рассеивание теплоты}}$

x-темп-ра

$$\begin{cases} \dot x = F(u) - G(x) \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_1 > x_0 \\ L = \int_0^T u(t)dt \to \min\limits_{u(\cdot)\in D_u} \end{cases} \longrightarrow \dot x = \frac{1}{a}\frac{u}{1+\frac{u}{k}} - b\cdot(x-x_0)$$

$a, k, b > 0$ - коэфф-ы

x_0, x_1

T- не фиксир.: $x(T)=x_1$

① Введем новые перем.: $z = \frac{a(x-x_0)}{k}$, $v = \frac{u}{k}$,
(для упрощения) $z_1 = \frac{a(x_1-x_0)}{k}$

$$(*)\begin{cases} \dot z = \frac{v}{1+v} - bz \\ z(0) = 0 \\ z(T) = z_1 \\ J = \int_0^T v(t)dt \to \min\limits_{v(\cdot)\in D_v} \end{cases}$$

=> осталось всего 2 параметра: "b" и "z_1"

$\left.\begin{matrix} \text{I } U = [0, +\infty) \\ \text{II } U = [0, u^+] \end{matrix}\right\}$ 2 модели

I $V \overset{U}{=} [0; +\infty)$

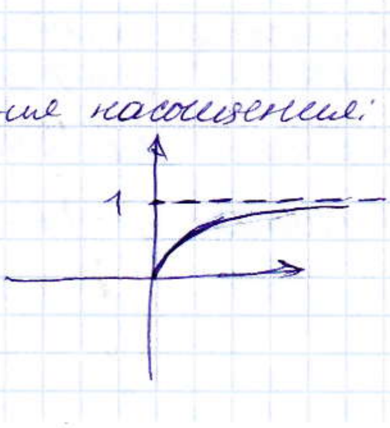
II $V = [0, v^+]$, $v^+ = \frac{u^+}{k}$

$f(x) = \frac{x}{1+x}$ - классич. ф-ия насыщения:

$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$

$f''(x) = -\frac{2}{(1+x)^3} \leq 0$

$f(0) = 0$, $f(+\infty) = 1$



Будем считать, что $\exists \varepsilon > 0$: на $[0, \varepsilon]$ $v(t) \underset{>0}{\not\equiv 0}$

(включили газ, не застаивались)

I $V = [0, +\infty)$

$0 \le \frac{v}{1+v} < 1$, bz - неогранич. => дойдём ли вообще до z_1?

Лемма (об управляемости)

Зад. Д/се (*) с ОУ I управляема, если $z_1 < \frac{1}{b}$;

с ОУ II управляема, если $z_1 < \frac{1}{b} \cdot \frac{v^+}{1+v^+}$

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{v}{1+v} - bz \\ z(0) = 0 \\ z(T) = z_1 \\ \int_0^T v(t)dt \to \min\limits_{v \in D_V} \end{cases}$$

T. Чаплыгина: если есть 2 д-ДУ с один. нач. условием $\dot{x} = f(x,t)$, $x(t_0) = z_0$; $\dot{y} = g(y,t)$, $y(t_0) = z_0$, то если

$\forall (z,t) \in E^2$ $f(z,t) \le g(z,t) \Rightarrow x(t) \le y(t)$, $t \in [0, T]$

$0 \le \dot{z} \le 1 - bz$

$\begin{cases} \dot{z} = 1 - bz \\ z(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow z_+(t) = \frac{1}{b}(1 - e^{-bt})$ => по т. Чаплыгина =>

$$\underset{\overset{\parallel}{0}}{z_-(t)} \le z(t) \le z_+(t)$$

$$0 \le z(t) \le \frac{1}{b}(1 - e^{-bt}) < \frac{1}{b}$$

$$\xrightarrow{} \frac{1}{b}$$

II $0 \le \dot{z} \le \frac{v^+}{1+v^+} - bz$

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{v^+}{1+v^+} - bz \\ z(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \le z(t) \le \frac{1}{b} \cdot \frac{v^*}{1+v^+} (1 - e^{-bt}) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{1}{b} \cdot \frac{v^*}{v^*+1}$$

② ПМП

$\mathcal{H}(z,\psi,v)=\psi_0\cdot v+\psi\left(\frac{1}{1+v}-bz\right)$

$\psi_0\leq 0$

1) $\psi_0=0$, $\mathcal{H}=\psi(t)\left(\frac{v(t)}{1+v(t)}-bz(t)\right)=0$, $t\in[0,T]$

a) $\exists t^*, \psi(t_*)\neq 0$

b) $\left(\frac{v(t)}{1-v(t)}-bz(t)\right)=0$

2) $\psi_0<0 \Rightarrow \psi_0=-1$

$$\Downarrow$$

$\mathcal{H}(z,\psi,v)=-v+\psi\left(\frac{v}{1+v}-bz\right)$

$v\geq 0 \Rightarrow \mathcal{H}'_v=-1+\frac{\psi}{(1+v)^2}$

- $\psi<1 \Rightarrow \mathcal{H}'_v<0$ всегда $\Rightarrow \mathcal{H}\downarrow v \Rightarrow$

$\Rightarrow v_*(\psi)=0$

- $\psi\geq 1 \Rightarrow 1=\frac{\psi}{(1+v)^2} \Rightarrow v_*(\psi)=\sqrt{\psi}-1$

$$\Downarrow$$

$$v_*(\psi)=\begin{cases}0, & \psi<1\\ \sqrt{\psi}-1, & \psi\geq 1\end{cases}$$

$\psi(0)\geq 1$, т.к. $\exists\,\psi(0)<1 \Rightarrow \exists\varepsilon>0$ на $[0,\varepsilon]$ $\psi(t)<1 \Rightarrow$ ОУ $v^*(\psi(t))\equiv 0$, $t\in[0,\varepsilon]$ — мы это запретили!

③ $\mathcal{H}(z(t),\psi(t),v(t))\equiv 0$, $t\in[0,T]$

$\exists t=0$ $\quad -v(0)+\psi(0)\left(\frac{v(0)}{1+v(0)}-b\underset{0}{\underset{\|}{z(0)}}\right)=0$

$$\Downarrow$$

$v(0)\left(-1+\frac{\psi(0)}{1+v(0)}\right)=0$

$\Rightarrow$ 1. $v(0)=0 \Rightarrow \sqrt{\psi(0)}-1=0 \Rightarrow \psi(0)=1$

2. $\frac{\psi(0)}{1+v(0)}=1 \Rightarrow \frac{\psi(0)}{1+\sqrt{\psi(0)}-1}=1 \Rightarrow \underbrace{\psi(0)=1}_{\text{очень хорошее условие}}$

$$\begin{cases}\dot{\psi} = -\mathcal{H}'_z = b\psi \\ \psi(0)=1\end{cases} \Rightarrow \psi(t)=e^{bt} \geq 1,\ t \geq 0$$

$$v_*(t) = \sqrt{\psi(t)} - 1 = e^{\frac{b}{2}t} - 1$$

$$\frac{v_*(t)}{1+v_*(t)} = \frac{e^{\frac{b}{2}t}-1}{e^{\frac{b}{2}t}} = 1 - e^{-\frac{b}{2}t} \Rightarrow \begin{cases}\dot{z} = 1 - e^{-\frac{b}{2}t} - bz \\ z(0)=0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$z_*(t) = \frac{1}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{2}t}\right)^2$$

$$z_*(T) = z_1 \Rightarrow \frac{1}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{2}T}\right)^2 = z_1 \Rightarrow 1-e^{-\frac{b}{2}T} = \sqrt{bz_1}$$

$$e^{-\frac{b}{2}T} = 1-\sqrt{bz_1} \Rightarrow T_* = \frac{2}{b}\ln\frac{1}{1-\sqrt{bz_1}} > 0$$

$$I = \int_0^{T_*} v_*(t)dt = \frac{2}{b}\left(\frac{1}{1-\sqrt{bz_1}} - 1\right) - \frac{2}{b}\ln\frac{1}{1-\sqrt{bz_1}}$$

$$\Downarrow$$

I $V = [0, +\infty)$

$$(I)\begin{cases} v_*(t) = e^{\frac{b}{2}t} - 1 \\ z_*(t) = \frac{1}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{2}t}\right)^2 \\ T_* = \frac{2}{b}\ln\frac{1}{1-\sqrt{bz_1}}\end{cases}$$ – гладкая дифф-ая

II $V = [0, v^+]$

ПМП:... $\Rightarrow v_*(\psi) = \begin{cases} 0, & \psi < 1 \\ \sqrt{\psi}-1, & \sqrt{\psi}-1 \in [0, v^+] \\ v^+, & \sqrt{\psi}-1 > v^+\end{cases}$

а) $t \in [0, T_*]$

$v_*(t) \leq v^+$

$\Downarrow$

(I)-оптим. реш. в случ. II

б). $\exists \theta \in (0, T_*): v_*(\theta) = v^+$

$\Downarrow$

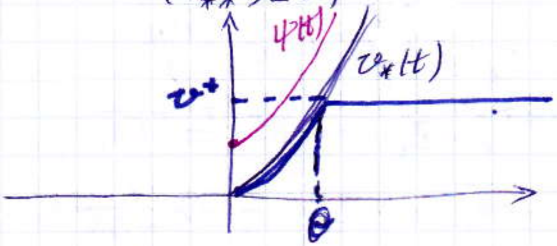
$\psi(t) = e^{bt}$

$$v_{**}(t) = \begin{cases} v_*(t), & t \in [0, \theta] \\ v^+, & t \in (\theta, T_{**}]\end{cases}$$

$$z_{**}(t) = \begin{cases} z_*(t), & t\in[0,\theta] \\ \tilde{z}(t), & t\in(\theta, T_{**}] \end{cases}$$

где
$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}(t) = \frac{v^+}{1+v^+} - b\tilde{z} \\ \tilde{z}(\theta) = z_*(\theta) = \frac{1}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{2}\theta}\right)^2 \end{cases}$$

$\tilde{z}(T_{**}) = z_1$



Вернемся к зад. (I)

1. $\frac{v}{1+v} = \frac{e^{\frac{b}{2}t}-1}{e^{\frac{b}{2}t}} = 1-e^{-\frac{b}{2}t} = \sqrt{bz}$

$\{1-e^{-\frac{b}{2}t} = \sqrt{bz}$ на ОУ$\}$

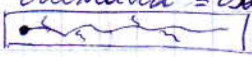
$\Downarrow$

$$\begin{cases} \dot{z} = \sqrt{bz} - bz \\ z(0)=0 \end{cases}$$
– замкнут. у-ие! приятнее :) но ПК даёт только $z(t)\equiv 0$

2. Замена $\sqrt{bz} = Y \Rightarrow bz = Y^2,\ b\dot{z} = 2Y\dot{Y} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{2}{b}Y\dot{Y} = Y - Y^2 \\ Y(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{Y} = \frac{b}{2}(1-Y) \\ Y(0)=0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{ненулевое :)}$$

биомасса ≡ длина трихомы



Задача о Трихоме.

ресурсы: восстан. батареи или увеличение биомассы

x – характеристика хим. батареи трихомы ↳ способность усвоения "пищи"

$$(1)\ \begin{cases} \dot{x} = a-(a+x)\cdot u, & \underset{\text{индивид. характ. (восстан. батареи)}}{a>0} \\ x(0)=x_0>0, & x(t)>0 \end{cases}$$
$$J = -\int_0^T \frac{x}{1+x}u\,dt \to \max_{0\le u\le 1},\quad T>0 \text{ – фиксир}$$

1. ∃ силы все только на восстановление $\overset{u=0}{\Rightarrow} \dot{x}=a$

$u=0 \Rightarrow$ биомасса стоит $(\int_{..}=0)$; $x_+(t)=at+x_0$

∃ все силы в биомассу $\overset{u=1}{\Rightarrow} \begin{cases}\dot{x}=-x\\ x(0)=x_0\end{cases} \Rightarrow x=x_0 e^{-t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$\Downarrow$ Крайние случаи не подходят.

$\Downarrow$ $\int_0^T .. \longrightarrow 0;\ x_-(t)=x_0e^{-t}$

2. Фазовое ограничение не важно: $x(t)\overset{?}{>}0$

$x(0)>0 \Rightarrow \forall u(\cdot)_{\in D_u}\ \exists \varepsilon>0: \begin{cases}\dot{x}=a-(a+x)\cdot u\\ x(0)=x_0\end{cases}$ решение

лемма

~~$x(t)>0$~~ $\Rightarrow$ на $[0,\varepsilon)$ $\quad 0<x_-(t)\le x(t)\le x_+(t)$

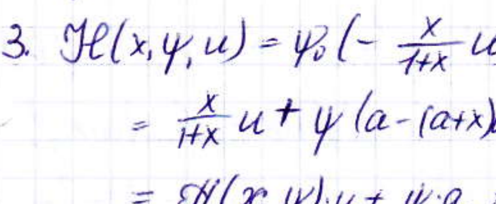
∃ $x(\varepsilon)=0 \xRightarrow{\text{т. Чаплыгина}} \underset{u=1}{-x} \le \dot{x} \le \underset{u=0}{a}$

$$x_-(t)\equiv x_0e^{-t} \le x(t) \le at+x_0 = x_+(t)$$

$0=x(\varepsilon) \overset{\text{т.Ч.}}{\geq} x_0e^{-\varepsilon} >0$ – противоречие!

$\boxed{6.05.14}$

$X(t)=[x_-(t), x_+(t)]$



3. $\mathcal{H}(x,\psi,u)=\psi_0\left(-\frac{x}{1+x}u\right)+\psi(a-(a+x)u)=\{\psi_0=-1\}$

$=\frac{x}{1+x}u+\psi(a-(a+x)u)=\left(\frac{x}{1+x}-\psi(a+x)\right)u+\psi\cdot a=$

$=\underbrace{\mathcal{H}(x,\psi)}_{\text{ф-ия переключения}}\cdot u+\psi\cdot a$, где $\mathcal{H}(x,\psi)=\frac{x}{1+x}-\psi(a+x)$

$$\mathcal{H} \xrightarrow[u\in[0,1]]{} \max \Rightarrow u_*(x,\psi) = \begin{cases} 1, & \mathcal{H}>0 \\ 0, & \mathcal{H}<0 \\ \underbrace{u_S}, & \mathcal{H}\equiv 0 \end{cases}$$

некоторое сингулярное упр-ие (потом с ним разберёмся)

краев. зад. принципа max

$$\begin{cases} \dot{x} = a-(a+x)u_*(x,\psi) \\ \dot{\psi} = -\mathcal{H}'_x = -\left(\frac{1}{(1+x)^2}-\psi\right)u = \left(\psi - \frac{1}{(1+x)^2}\right)u_*(x,\psi) \\ x(0)=x_0 \\ \psi(T)=0 \end{cases}$$

Лемма2

$\exists \theta \geq 0,\ \theta < T,\ u_*(t)\equiv 1,\ t\in[\theta,T]$

◁ $\mathcal{H}(x(t),\psi(t)) = \frac{x(t)}{1+x(t)} - \psi(t)(a+x(t))$

$$\mathcal{H}\Big|_{t=T} = \frac{x(T)}{1+x(T)} - \underset{\underset{0}{\parallel}}{\psi(T)}\cdot(a+x(T)) = \underbrace{\frac{x(T)}{1+x(T)}}_{\text{непр.}} > 0 \Big/ \Rightarrow$$

~~x непр~~

$\Rightarrow \exists \theta\in[0,T] : \mathcal{H}(t)>0\ \forall t\in[\theta,T] \Rightarrow u_*(t)=1$ ▷

(в конце знаем, что $u_*\equiv 1$) ⇝ ведём себя странно:) перед смертью

4. $\exists$ при $t\in(\alpha,\beta)$, $\alpha<\beta$: $\mathcal{H}(x(t),\psi(t))\equiv 0$

$\frac{d}{dt}\mathcal{H}\equiv 0$ ⇝ вытаскиваем "особый" режим

$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H}\equiv 0$

$$\dot{\mathcal{H}}\equiv 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{1+x}-\psi(a+x)\right) = \frac{1}{(1+x)^2}\dot{x} - \dot{\psi}(a+x) - \psi(\dot{x}) =$$

$$= \dot{x}\left(\frac{1}{(1+x)^2}-\psi\right) - (a+x)\left(\psi - \frac{1}{(1+x)^2}\right)u(x,\psi) =$$

$$= \left(\frac{1}{(1+x)^2}-\psi\right)\left(\dot{x}+(a+x)\cdot u\right) = \{\dot{x}=a-(a+x)u\} = a\underset{\underset{0}{|||}}{\left(\frac{1}{(1+x)^2}-\psi\right)}$$

$$\dot{\mathcal{H}} \equiv 0 \iff \psi \equiv \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow \dot\psi = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{H} = 0 \iff \dot\psi = -\frac{2}{(1+x)^3}\dot x \Rightarrow \dot x \equiv 0$$

$$\dot x \equiv 0 \Rightarrow x(t) = const = x_s \Rightarrow u_s = \frac{a}{a+x_s} \in [0,1]$$

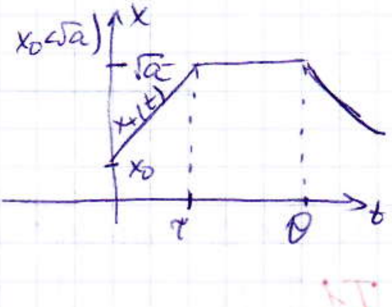
$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{H} \equiv 0 \iff \frac{x}{1+x} = \psi(a+x) \Rightarrow \psi \equiv \frac{x}{(1+x)(a+x)} \\ &\dot{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow \psi = \frac{1}{(1+x)^2} \end{aligned}\right/ \Rightarrow$$

$$\frac{x}{(1+x)(a+x)} = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow \begin{aligned} x(1+x) &= a+x \\ x^2 &= a \\ x_s &= \sqrt{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_s = \frac{a}{a+\sqrt a} = \frac{\sqrt a}{1+\sqrt a} \in (0,1) \\ x_s = \sqrt a \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(t) = u_s, & t \in (\alpha,\beta) \\ x(t) = x_s, & t \in (\alpha,\beta) \\ \psi(t) = \frac{1}{(1+\sqrt a)^2} \end{cases}$$ } лучше это состояние держать как можно дольше, но надо достичь $x(t)=x_s=\sqrt a$

5. $$u_*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,\tau] \\ u_s, & t \in (\tau,\theta] \\ 1, & t \in (\theta, T] \end{cases}$$ (если $x_0 < \sqrt a$)



$$x_*(t) = \begin{cases} x_0 + at, & t \in [0,\tau] \\ \sqrt a, & t \in (\tau,\theta] \\ \sqrt a \cdot e^{\theta - t} & t \in (\theta, T] \end{cases}$$

τ: $x_0 + a\tau = \sqrt a \Rightarrow \tau = \frac{\sqrt a - x_0}{a}$ (если $x_0 < \sqrt a$)
τ: $x_+(t) = \sqrt a$ (если $x_0 > \sqrt a$)

Как найти θ – ?!

6. $\exists\forall$ $$\bar u(t) = \begin{cases} \tilde u(t), & t \in [0,\tau) \\ u_s, & t \in [\tau,\theta] \\ 1, & t \in (\theta, T] \end{cases}$$ (ведем себя как-то) $$\bar x(t) = \begin{cases} \tilde x(t), & t \in [0,\tau] \\ \sqrt a, & t \in (\tau,\theta] \\ \sqrt a\, e^{\theta - t}, & t \in (\theta, T] \end{cases}.$$

$$J = \int_0^T \left(\frac{-\bar{x}(t)}{1+\bar{x}(t)}\right)\bar{u}(t)dt = \int_0^{\tau} \frac{-\tilde{x}(t)}{1+\tilde{x}(t)}\, \tilde{u}(t)dt + \int_{\tau}^{\theta} \left(-\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)dt +$$

$$+ \int_{\theta}^{T} \left(-\frac{\sqrt{a}e^{\theta-t}}{1+\sqrt{a}e^{\theta-t}}\right)dt = const - \left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2(\theta-\tau) +$$

$$+ \ln\frac{1+\sqrt{a}e^{\theta-t}}{1+\sqrt{a}} \cancel{d} = \varphi(\theta)$$

Хотим $\varphi(\theta) \to \min\limits_{\theta > T}$

$$\varphi'(\theta) = -\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{\sqrt{a}e^{\theta-T}}{1+\sqrt{a}e^{\theta-T}} = 0$$

$$\varphi''(\theta) = \frac{\sqrt{a}e^{\theta-T}(1+\sqrt{a}e^{\theta-T}) - (\sqrt{a}e^{\theta-T})}{(1+\sqrt{a}e^{\theta-T})^2} = \frac{\sqrt{a}e^{\theta-T}}{(1+\sqrt{a}e^{\theta-T})^2} > 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2 + \sqrt{a}e^{\theta-T}\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2 = \sqrt{a}e^{\theta-T}$$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2 = e^{\theta-T}\sqrt{a}\left(1-\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2\right)$$

$$\Downarrow$$

$$T-\theta = \ln\left(2+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)_{\to 0}; \quad \theta = T - \ln\left(2+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

Скачок:

скачок зависит от $\bar{x} < \sqrt{a}$

$$\sqrt{a}e^{\theta-T} = \bar{X}(T)$$

$$T-\theta = \ln\frac{\sqrt{a}}{\bar{x}(T)}$$

7. Док-во оптим. построенного процесса

T.1 I $\exists\, x_0 \in (0,\sqrt{a})$, $T > \ln\left(2+\frac{1}{\sqrt{a}}\right) + \frac{\sqrt{a}-x_0}{a}$

$$\Rightarrow u_*(t) = \begin{cases} 0, & t\in[0,\tau], \quad \tau = \frac{\sqrt{a}-x_0}{a}, \quad T-\theta = \ln\left(2+\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \\ u_s, & t\in(\tau,\theta] \\ 1, & t\in[\theta,T] \end{cases}$$

$$x_*(t) = \begin{cases} x_+(t) \\ \sqrt{a} \\ \sqrt{a}e^{\theta-t} \end{cases}$$

/ оптим. упр-ие

II $x_0 = \sqrt{a} \Rightarrow u_* = \begin{cases} u_s \\ 1 \end{cases}$

$\boxed{\text{III}}$ $x_0 > \sqrt{a}$

$$x_* = \begin{cases} x_S \\ 1 \end{cases}$$

$$u_*(t) = \begin{cases} 1 \\ u_S \\ 1 \end{cases}$$

Рассмотр. зад. 2:

$$(2)\begin{cases} \dot{x} = a - (a+x)u \\ x(0) = x_0 > 0, \quad x(T) = x_1 \in (0, \sqrt{a}) \\ \int_0^T \left(-\frac{x}{1+x}\right) u \, dt \xrightarrow[\substack{u \in D_u \\ u \in [0,1]}]{} \min \end{cases}$$

Док-ем т.2 для зад. (2)

т.2.

$\exists x_0 \in (0, \sqrt{a})$, $\exists T > \ln\left(\frac{\sqrt{a}}{x_1}\right) + \frac{\sqrt{a} - x_0}{a}$

$$\Rightarrow u_* = \begin{cases} 0 \\ u_S \quad \dots \\ 1 \end{cases} \qquad T - \Theta - \ln\frac{\sqrt{a}}{x_1}$$

$$x_*(t) = \begin{cases} x_+(t) \\ \sqrt{a} \\ \sqrt{a} e^{\Theta - T} \end{cases}$$

$\downarrow$

оптим. упр-ие

1. $$\mathcal{J} = \int_0^T \left(-\frac{x(t)}{1+x(t)} u(t) + \dot{w}_{(2)} - \dot{w}_{(2)}\right) dt \text{, где}$$

$$\dot{w}_{(2)} = \frac{d}{dt} w(x) = W'(x) \cdot \dot{x} = W'(x) \cdot (a - (a+x)u)$$

$$W(x) = -\int_0^x \frac{\xi \, d\xi}{(1+\xi)(a+\xi)}$$

$$\dot{W}'(x) = \frac{-x}{(1+x)(a+x)}$$

$$\mathcal{J} = -W(x(t))\Big|_{t=0}^{t=T} + \int_0^T \left(-\frac{x}{1+x} u - \frac{x \cdot (a - (a+x)u)}{(1+x)(a+x)}\right) dt =$$

$$= \underbrace{-W(x_1) + W(x_0)}_{const} + \int_0^T \left(-\frac{xu}{1+x} - a\frac{x}{(1+x)(a+x)} + \frac{xu}{1+x}\right) dt =$$

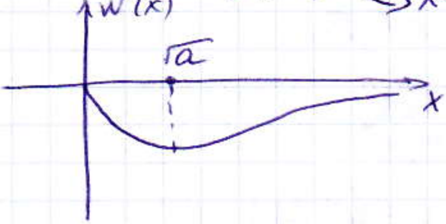
$$= Const + a\int_0^T W'(x(t)) dt$$ $\rightsquigarrow$ убрали ф-цию u, которая может быть и прерыв.

2. $\forall$ допуст. процесс $\hat{u}(t), \hat{x}(t)$.

$$\Delta J = \mathcal{J}(\hat{u}(t)) - \mathcal{J}(u_*(\cdot)) = a\int_{\theta}^{T}(W'(\hat{x}(t)) - W'(x_*(t)))dt$$

$W'(0)=0$
$W'(x)<0 \quad \forall x>0$
$W'(+\infty)=0$
$\Downarrow \min$

$$W''(x) = \frac{x^2-a}{(1+x)^2(a+x)^2}, \quad W''(\sqrt{a})=0 \Rightarrow x=\sqrt{a}=\min W'(x), \quad x\in[0,+\infty)$$



Вернемся к т.2.
$\exists\, x(\cdot), u(\cdot)$ – $\forall$ доп. процесс в (2)

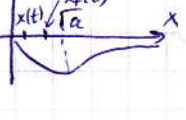
(прираш. ф-ала должно быть нужного знака ≥ 0)

$$\Delta J = \mathcal{J}(u(\cdot)) - \mathcal{J}(\bar{u}(\cdot)) = a\int_0^T (W'(x(t)) - W'(\bar{x}(t)))dt =$$

$$= a\Big[\underbrace{\int_0^{\tau}(W'(x(t)) - W'(\bar{x}(t)))dt}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\tau}^{\theta}(W'(x(t)) - W'(\sqrt{a}))dt}_{\geq 0}$$
$$+ \int_{\theta}^{T}(W'(x(t)) - W'(\bar{x}(t)))dt\Big] \geq 0$$

т. к.

1. $x(t) \leq x_+(t)$ всегда, $\Rightarrow \forall t\in[0,\tau]$
$x_+(t) < \sqrt{a}$ для $\forall t\in[0,\tau]$
$\Downarrow$
$W'(x(t)) - W'(x_+(t)) \geq 0$



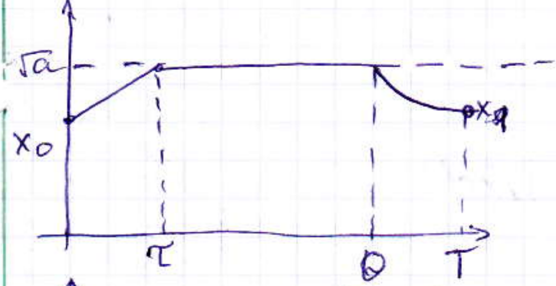
2). $t\in[\tau,\theta]$: $W'(\sqrt{a})$ – min $\Rightarrow W'(x(t)) \geq W'(\sqrt{a})$

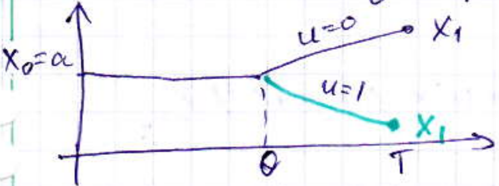
3).

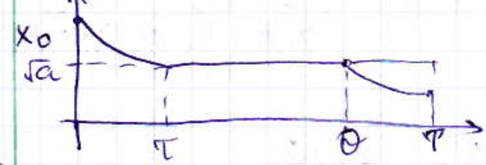
если окажемся выше ~~ниже~~ графика => не сможем достичь x_1 на [illegible] T =>

$\forall t\in[\theta,T]$: $x(t) \leq \bar{x}(t) = \sqrt{a}\,e^{\theta-T} \leq \sqrt{a}$ =>
$W'(x(t)) \geq W'(\bar{x}(t))$
$\Downarrow$
$\bar{u}(\cdot), \bar{x}(\cdot)$ – оптим. пр-сс.

А в т.1 все ясно, просто опускаем t_1:







Модель Рамсея

не обязательно применять ПМ для получения решения

чуть упрощ. модель (экономич.)

$\dot{x} = u\cdot f(x) - \mu x$, x - основные фонды

$x(0)=x_0>0$ DY - динамика осн. фондов

μx - амортизация

$$J=\int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-\nu t}}_{\text{дисконт. мн-тель}} [1-u(t)] f(x(t))dt \to \max_{\underbrace{u(\cdot)}_{\text{доля}}\in[0,1]}$$

дисконт. мн-тель + борьба с бесконечн. горизонтом ($\int^{+\infty}$)

неоклассич. условия

$$\left[\begin{array}{l} f(0)=0;\ f(x)>0\ \forall x>0;\ f(+\infty)=+\infty \\ f'(x)>0\ \forall x>0;\ f'(+0)=+\infty,\ f'(+\infty)=0, \\ f''(x)<0,\ \forall x>0 \end{array}\right.$$

S $f(x)=Ax^{\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$

Возьмём $f(x)=\sqrt{x}$

Задача (упрощ.):

$$\dot x = u\sqrt{x} - \mu x$$
$$x(0)=x_0>0$$
$$J=\int_0^{+\infty} e^{-\nu t}(1-u)\sqrt{x}\,dt$$

наш человек.
"Мы его уважаем и реш-ие запишем"

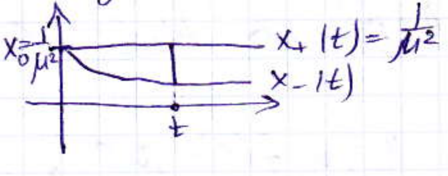
у-ие Бернулли

Т. Чаплыгина:
$\forall\ u(\cdot)$

$$\underset{\dot x_-}{\underset{\shortparallel}{-\mu x}} \le \dot x = u\sqrt{x}-\mu x \le \underset{\dot x_+}{\underset{\shortparallel}{\sqrt{x}-\mu x}}$$
$$\Downarrow$$
$$x_-(t)\le x(t)\le x_+(t),\quad t\in[0,+\infty)$$

т.к. X_+ и X_- $\exists$ на $[0,+\infty)$

$$x_-(t)=x_0e^{-\mu t}$$
$$x_+(t)=\left[\left(\sqrt{x_0}-\frac{1}{\mu}\right)e^{-\frac{\mu t}{2}}+\frac{1}{\mu}\right]^2$$
$$\lim_{t\to\infty}x_-(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}x_+(t)=\frac{1}{\mu^2}$$



$$X(t)=[x_-(t),x_+(t)]$$

$$\left.\begin{aligned}&u_s=\frac{\mu}{2(\mu+\nu)}\in(0,1)\\&0<x_s=\frac{1}{(2(\mu+\nu))^2}<\frac{1}{\mu^2}\end{aligned}\right|\Rightarrow u_s=\mu\sqrt{x_s}$$

I.

① $x_0 \in (0, x_s)$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau] \\ u_s, & t \in (\tau, +\infty) \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} x_+(t), & t \in [0, \tau] \\ x_s, & t \in (\tau, +\infty) \end{cases}$$

$$x_+(\tau) = x_s, \quad \tau = \frac{2}{\mu} \ln \frac{1 - \mu\sqrt{x_0}}{1 - \mu\sqrt{x_s}}$$

② $x_0 = x_s$

$$\left.\begin{matrix} u(t) = u_s \\ x(t) = x_s \end{matrix}\right. \quad t \in [0, +\infty$$

③ $x_0 > x_s$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau] \\ u_s \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} x_-(t), & t \in [0, \tau] \\ x_s \end{cases}$$

$$x_-(t) = x_s, \quad \tau = \frac{1}{\mu} \ln \frac{x_0}{x_s}$$

$$\overset{\text{система}}{\Rightarrow} u = \frac{\dot{x} + \mu x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \{\text{в ф-ал}\}$$

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t}\left(1 - \frac{\dot{x} + \mu x}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t}(\sqrt{x} - \dot{x} - \mu x)\,dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\nu t}(\sqrt{x} - \mu x)\,dt - \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\nu t}\dot{x}\,dt}_{Ⅱ}$$

$$Ⅱ: \int_0^{+\infty} e^{-\nu t}\dot{x}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\nu t}\,d(x(t)) = \underbrace{x(t)}_{\text{огранич. на } \infty \; x_+} e^{-\nu t}\Big|_{t=0}^{\infty} -$$

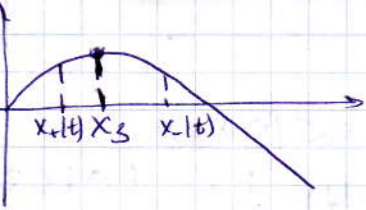
$$\int_0^{+\infty} (-\nu) e^{-\nu t} x\,dt = -x_0 + \nu\int_0^{+\infty} e^{-\nu t} x\,dt$$

$$\Downarrow$$

$$J = x_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\nu t}(\sqrt{x} - (\mu + \nu)x)\,dt$$

Рассмотрим

$\sqrt{x}-(\mu+\nu)x=W(x)$:



$$W'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-(\mu+\nu)=0$$

$$W''(x)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}^3}<0 = max$$

$$x_s=\frac{1}{(2(\mu+\nu))^2}$$

Управл-ие: $u(t)=\frac{\dot{x}(t)+\mu x(t)}{\sqrt{x(t)}}$

$x(t)=\arg max \; W(x(t))$

$$\Delta J = J(u_{опт}(\cdot)) - J(\underset{\forall упр.}{u(\cdot)}) \overset{①}{=} \int_0^{\tau} e^{-\nu t}\left(W(\underset{\substack{\vee\\0}}{x_+(t)}) - W(x(t))\right)dt$$

$$+ \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\nu t}\left(W(x_s) - \underset{\substack{\vee\\0}}{W}(x(t))\right)dt \geq 0$$

Все остальные случаи аналогично. ▷

Замеч.: если делать всё честно, то тоже получиться.

док-во: как ранее или, используя св-во выпуклости